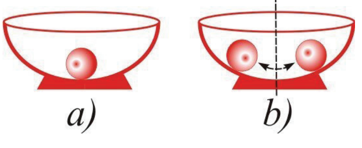
Poglavlje 11

HARMONIJSKO TITRANJE

11.1 Osnovni pojmovi i definicije



Slika 11.1

Ako neki sustav pomaknemo iz položaja stabilne ravnoteže, tada sustav nastoji da se vrati u ravnotežni položaj. Na primjer uzmimo kuglicu koja se nalazi u posudi (slika 11.1). Ako kuglicu pomaknemo iz položaja ravnoteže, ona će se vraćati u ravnotežni položaj, gibati se u suprotnom smjeru i ponovo vraćati u ravnotežni položaj.

Ovakav tip gibanja nazivamo oscilacijsko gibanje.

Oscilacijsko gibanje je opisano maksimalnom udaljenošću tijela od ravnotežnog položaja koje nazivamo amplituda osciliranja i vremenom potrebnim da se gibanje ponovi - periodom osciliranja. Broj osciliranja po jedinici vremena nazivamo frekvencijom.

Titranja i njihala Materijalna točka (sitno tijelo) jednostavno titra oko položaja ravnoteže pod utjecajem elastične ili harmonijske sile. Ta sila je uvijek usmjerena prema ravnotežnom položaju i vraća tijelo u položaj ravnoteže i ima oblik:

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{x} \tag{11.1.1}$$

gdje je $k-$ konstanta elastičnosti, a $\overrightarrow{x}-$ elogancija, tj. trenutna udaljenost tijela od položaja ravnoteže. Koristeći II. Newtonov zakon

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m \cdot \frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2}$$

dolazimo do jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora

$$m \cdot \frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} + k \cdot \overrightarrow{x} = 0 \tag{11.1.2}$$

koja ima opće rješenje

$$\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

gdje je $\overrightarrow{A}-$ amplituda, $\varphi-$ početna faza, a $\omega-$ kružna frekvencija.

Veza između kružne frekvencije i frekvencije, odnosno periodom, prikazana je izrazom

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

gdje je $T-$ period titranja jednak

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Definicija 11.1.1 *Sitno tijelo (materijalna točka) mase m obješeno o nit konstantne duljine i zanemarive težine nazivamo matematičko njihalo.*

Izvede li se tijelo iz položaja ravnoteže za određeni kut ϑ i prepusti samom sebi, ono se njiše. Sila koja vraća tijelo u položaj ravnoteže iznosi

$$F = -mg\sin\vartheta$$

dok za mali kut ϑ vrijedi aproksimacija

$$F = -mg\vartheta$$

Jednadžba gibanja i rješenja za matematičko njihalo jednaki su jednadžbi gibanja i rješenju za jednostavno titranje. Period titranja matematičkog njihala iznosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdje je $l-$ duljina niti, a $g-$ akceleracija slobodnog pada.

Idealno čvrsta tijela pod djelovanjem vanjskih sila ne mijenjaju svoj oblik, dok se realna čvrsta tijela deformiraju. Ako su deformacije elastične, vrijedi Hookeov zakon

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

gdje je $\sigma = \frac{F}{S}$ napetost, F sila i S površina na koju ta sila djeluje. Koeficijent proporcionalnosti E nazivamo Youngov modul elastičnosti.

Poseban je slučaj deformacija štapa učvršćenog na jednom kraju. Kada na drugom kraju štapa djeluje par sila, moment para sila $\overrightarrow{M}_p$ izazvat će torziju

$$\overrightarrow{M}_p = D \cdot \overrightarrow{\vartheta}$$

gdje je D onstanta torzije:

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l} \cdot G$$

gdje je G modul torzije, $\overrightarrow{\vartheta}$ zakret zbog torzije za štap duljine l i polumjera r.

Kod torzionog njihala (oscilatora) moment para sila uravnoteži se sa momentom u žici

$$\overrightarrow{M}_p = -\overrightarrow{M}_ž$$

U trenutku kada prestane djelovati moment para sila $\overrightarrow{M}_p$, tijelo se vraća u položaj ravnoteže pod djelovanjem momenta žice $\overrightarrow{M}_ž$

$$I \cdot \frac{d^2\overrightarrow{\vartheta}}{dt^2} + D \cdot \overrightarrow{\vartheta} = 0$$

Ova je jednadžba u matematičkom smislu jednaka (11.1.2) pa je analogno period torzionog titranja jednak

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

gdje je I moment inercije tijela s obzirom na os titranja.

Definicija 11.1.2 *Kruto tijelo koje se može okretati oko horizontalne osi koja ne prolazi kroz težište tijela naziva se fizičko njihalo.*

Ako takvo tijelo pomaknemo iz položaja ravnoteže i pustimo ono se njiše pod utjecajem momenta težine. Za male kutove moment težine glasi

$$\overrightarrow{M} = -mg \cdot L \cdot \overrightarrow{\vartheta}$$

gdje je L udaljenost osi rotacije od težišta tijela pa jednadžba gibanja ima oblik

$$I \cdot \frac{d^2\overrightarrow{\vartheta}}{dt^2} + mg \cdot L \cdot \overrightarrow{\vartheta} = 0$$

i ima isti oblik kao i jednadžba (11.1.2). Period fizičkog njihala tada glasi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg \cdot L}}$$

Ukupna energija E tijela koje jednostavno titra, tj. harmonijskog oscilatora je konstantna i jednaka je zbroju kinetičke i potencijalne energije

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}k \cdot A^2$$

11.2 Problemski zadaci

Problem 11.2.1 *Zadane su dinamičke jednadžbe gibanja. Koja od navedenih sila dozvoljava harmonijsko gibanje i zašto?*

a) $F = -ax$,
b) $F = ax^2$,
c) $F = -ax^2 + c$,
d) $F = ax^2 + bx + c$,
e) $F = -ax^3$.

Odgovor:

Točan odgovor je pod a) zbog toga što koristeći II. Newtonov zakon jedino ta jednadžba daje jednadžbu gibanja harmonjskog oscilatora, dok druge ne.

Problem 11.2.2 *Imamo matematičko njihalo duljine l i perioda T. Skratimo li duljinu njihala na $l_1 = \frac{l}{4}$ hoće li doći do promjene perioda i koliko?*

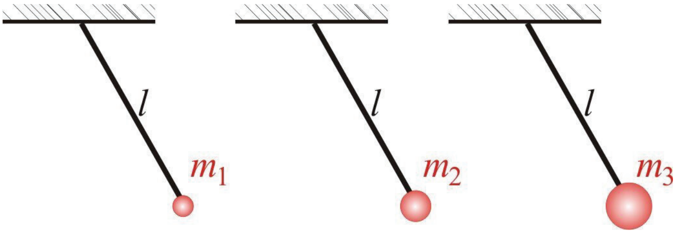
Odgovor:

Skraćivanjem duljine njihala dolazi do skraćivanja perioda njihanja i to za:

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\
T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l}{4}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2} \cdot T
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da će se period njahala skratiti na polovinu.

Problem 11.2.3 *Imamo tri matematička njihala iste duljine l na koji su obješene kugle različitih masa (slika 11.2.) i to tako da je $m_3 > m_2 > m_1$. Kako se odnose njihovi periodi njihanja T_1, T_2, T_3?*

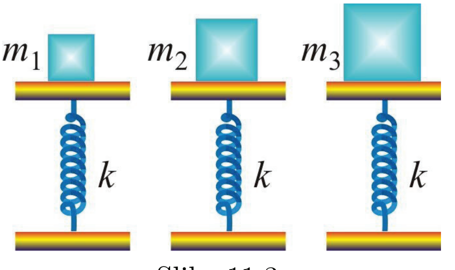


Slika 11.2

Odgovor:

Izraz za period njihanja ne ovisi o masi, tako da će period njihanja biti isti (svakako samo ako zanemarimo otpor zraka).

Problem 11.2.4 *Na horizontalnim podlogama se nalaze tri tjela masa $m_1 < m_2 < m_3$ (slika 11.3.), a podloge su na oprugama istih koeficijenata elastičnosti k. Kako se odnose periodi titranja opruga T_1, T_2, T_3?*



Slika 11.3.

Odgovor:

Kako je period opruge zadan izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

to će za veće mase period biti dulji proporcionalno s drugim korijenom promjene mase. Zbog toga će se period odnositi kao:

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_3}{k}} > T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} > T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

Dakle, sustav s većim masama ima veće periode uz istu konstantu elastičnosti opruga.

11.3 Primjeri

Primjer 11.3.1 *Ukupna energija čestice koja izvodi jednostavno harmonijsko gibanje perioda* $2\pi\,\mathrm{s}$ *je* $0.256\,\mathrm{J}$*. Pomak čestice u trenutku* $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{s}$ *je* $8\,\mathrm{cm}$*. Izračunajte amplitudu gibanja i masu čestice.*

Rješenje:

Iz izraza za jednostavno harmonijsko gibanje dobiva se vrijednost amplitude gibanja

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\,\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \\
x\left(t\right) &= A\sin\left(\omega t\right) = A\sin\left(1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\cdot t\right) \\
x\left(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}\right) &= 8\,\mathrm{cm} = A\sin\left(1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\pi}{6}\,\mathrm{s}\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\cdot\frac{1}{2} \\
A &= 2\cdot 8\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm} = 0.16\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Iz izraza za energiju slijedi

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \\
m &= \frac{2E}{\omega^2A^2} = \frac{2\cdot 0.256\,\mathrm{J}}{\left(1\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2\left(0.16\,\mathrm{m}\right)^2} = \frac{0.512\,\mathrm{J}}{0.025\,6\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 20\,\mathrm{kg}
\end{aligned}$$

Primjer 11.3.2 *Čestica čini jednostavno harmonijsko gibanje duž ravne crte i njezina brzina pri prolasku kroz točke* $1\,\mathrm{cm}$ *i* $2\,\mathrm{cm}$ *od središta njezine putanje je* $20\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ *odnosno* $10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$*. Odredite (a) amplitudu; (b) vremenski period gibanja.*

Rješenje:

a) Koristeći izraz za brzinu čestice pri harmonijskom titranju koja povezuje amplitudu i kutnu frekvenciju titranja dobiva se

$$\begin{aligned}
v &= \omega\sqrt{A^2-x^2} \\
v_1 &= \omega\sqrt{A^2-x^2} = \omega\sqrt{A^2-\left(1\,\mathrm{cm}\right)^2} = 20\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \\
v_2 &= \omega\sqrt{A^2-x^2} = \omega\sqrt{A^2-\left(2\,\mathrm{cm}\right)^2} = 10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
\sqrt{A^2-(1\,\mathrm{cm})^2} &= \frac{20\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{\omega} \Longrightarrow A^2 = \frac{400\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2}+1\,\mathrm{cm}^2 \\
\sqrt{A^2-(2\,\mathrm{cm})^2} &= \frac{10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{\omega} \Longrightarrow A^2 = \frac{100\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2}+4\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{400\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2}+1\,\mathrm{cm}^2 &= \frac{100\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2}+4\,\mathrm{cm}^2 \\
\frac{400\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2}-\frac{100\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\omega^2} &= 4\,\mathrm{cm}^2-1\,\mathrm{cm}^2 \\
\frac{1}{\omega^2}\left(300\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}\right) &= 3\,\mathrm{cm}^2 \\
\omega^2 &= \frac{100}{\mathrm{s}^2} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{100}{\mathrm{s}^2}} = 10\,\mathrm{s}^{-1} = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

odnosno amplituda je

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{400\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}}{\frac{100}{\mathrm{s}^2}}+1\,\mathrm{cm}^2 = 5\,\mathrm{cm}^2 \\
A &= \sqrt{5}\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Period titranja je

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10\,\mathrm{s}^{-1}}=\frac{\pi}{5}\,\mathrm{s}\approx 0.63\,\mathrm{s}$$

Primjer 11.3.3 *Mali malj mase* $100\,\mathrm{g}$ *oscilira kao jednostavno njihalo, amplitude* $\frac{10}{\pi}\,\mathrm{cm}$ *i perioda* $2\,\mathrm{s}$. *Odredite brzinu udarca i napetost niti kada je brzina udarca najveća.*

Rješenje:

Deriviranjem izraza za položaj harmonijskog titranja dobiva se izraz za brzinu i njenu maksimalnu vrijednost

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\sin\omega t \\
v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \omega A\cos(\omega t) = v_{\max}\cos(\omega t) \\
v_{\max} &= \omega A = \frac{2\pi}{T}\cdot A = \frac{2\pi}{2\,\mathrm{s}}\cdot\frac{10}{\pi}\,\mathrm{cm} = 10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 0.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

U ravnotežnom položaju težina malja i napetost djeluju u istom smjeru pa je ukupna napetost niti jednaka zbroju težine i centrifugalne sile na tijelo

$$N = G + F_{cf} = mg + \frac{mv_{\max}^2}{l}$$

Duljinu niti može se izračunati iz izaza za period gibanja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Longrightarrow l = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(2\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} \approx 0.994\,\mathrm{m}$$

odakle uvrštavanjem u izraz za napetost niti slijedi

$$\begin{aligned} N &= m\left(g + \frac{v_{\max}^2}{l}\right) = 0.1\,\mathrm{kg} \cdot \left[9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\left(0.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.994\,\mathrm{m}}\right] \\ &= 0.1\,\mathrm{kg} \cdot 9.82\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.982\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.4 *Uteg mase* $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ *visi na elastičnom peru i titra gore-dolje po putanji dugačkoj* $40\,\mathrm{cm}$. *Period titranja iznosi* $T = 4\,\mathrm{s}$. *Ako je u početnom trenutku mjerenja uteg u ravnotežnom položaju, odredite:*

a) brzinu i akceleraciju utega u trenutku kad uteg prolazi kroz položaj ravnoteže,

b) maksimalnu elastičnu silu koja djeluje na uteg,

c) maksimalnu kinetičku energiju utega.

Rješenje:

Kroz položaj ravnoteže uteg prolazi u početnom trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$, pa je:

a) brzina jednaka

$$\begin{aligned} v &= v_{\max}\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} \\ &= \frac{2\pi \cdot 0.2\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}}\cos\frac{2\pi \cdot 0\,\mathrm{s}}{4\,\mathrm{s}} = 0.1\pi\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 0 = 0.1\pi\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.31\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

kada uteg prolazi položajem ravnoteže $s = 0\,\mathrm{m}$ akceleracija je

$$a = -\omega^2 s = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) sila je maksimalna u maksimalnoj elongaciji - amplitudi, za

$$\begin{aligned} s &= AF_{\max} = -ks_{\max} = -kA = -\frac{4\pi^2}{T^2}mA \\ &= -\frac{4\pi^2}{(4\,\mathrm{s})^2} \cdot 0.2\,\mathrm{kg} \cdot 0.2\,\mathrm{m} = -0.01\pi^2\,\mathrm{N} = -9.87 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

c) uteg ima maksimalnu konetičku energiju za $v = v_{\max}$, što prikazano preko mase, amplitude i perioda iznosi

$$\begin{aligned} E_{k,\max} &= \frac{1}{2}mv_{\max} = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{2\pi A}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{4\pi^2 A^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 mA^2}{T^2} \\ &= \frac{2\pi^2 \cdot 0.2\,\mathrm{kg} \cdot (0.2\,\mathrm{m})^2}{(4\,\mathrm{s})^2} = 0.001\,\pi^2\,\mathrm{J} = 9.87\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.5 *Koliki je period titranja čestice koja ima akceleraciju $a = 1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ u trenutku kada je njezina udaljenost od ravnotežnog položaja $0.06\,\mathrm{m}$?*

Rješenje:
Iz izraza za ubrzanje imamo $a = \frac{4\pi^2}{T^2}s$ slijedi

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 s}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{s}{a}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0.06\,\mathrm{m}}{1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}\,\mathrm{s} = 1.4\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.6 *Uteg težak $G_1 = 30\,\mathrm{N}$ visi o jednom kraju elastične opruge i titra s periodom od $T_1 = 0.5\,\mathrm{s}$. Koliko iznosi konstanta opruge i koliki će biti period titranja utega težine $G_2 = 150\,\mathrm{N}$ koji harmonički titra obješen na istu oprugu?*

Rješenje:
Iz izraza za konstantu opruge dobivamo

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 G}{T^2 g} = \frac{4\pi^2 \cdot 30\,\mathrm{N}}{(0.5\,\mathrm{s})^2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 482.92\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

iz izraza za period titranja $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{G_1}{gk}} = 0.5\,\mathrm{s}$ slijedi

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{G_2}{gk}} = 2\pi\sqrt{\frac{5G_1}{gk}} = 2\pi\sqrt{\frac{G_1}{gk}} \cdot \sqrt{5} = 0.5\,\mathrm{s} \cdot \sqrt{5} = 1.12\,\mathrm{s}$$

što smo mogli dobiti i uvrštavanjem dobivene vrijednosti za konstantu opruge

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{G_2}{gk}} = 2\pi\sqrt{\frac{150\,\mathrm{N}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 482.92\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1.12\,\mathrm{s}$$

Primjer 11.3.7 *Ura (sat) sa njihalom izrađen je tako da period njihala bude $T = 1\,\mathrm{s}$ kad je ura točna. Izrađena ura zaostaje za pola sata na dan. Što treba uraditi s njihalom da ura bude točna?*

Rješenje:
Kad je sat točan, period njihala iznosi $T = 1\,\mathrm{s}$, pa je duljina tog njihala jednaka

$$l = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0.25\,\mathrm{m}$$

ako sat u jednom danu $1d = 24h$ zostane za pola sata, to je njegov period

$$T' = \frac{24}{23.5}\,\mathrm{s} = 1.02\,\mathrm{s}$$

pa je duljina njihala

$$l' = \frac{g\,(T')^2}{4\pi^2} = \frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1.02\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0.26\,\mathrm{m}$$

kako je duljina njihala kod točnog sata jednaka l,njihalo moramo skratiti za

$$\Delta l = l' - l = 0.26\,\mathrm{m} - 0.25\,\mathrm{m} = 0.01\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}$$

Primjer 11.3.8 *U mjestu B na ekvatoru Zemlje sat sa njihalom ima period titranja* $T_e = 1\,\mathrm{s}$*. Kad sat prenesemo u mjesto A na polu Zemlje, kolika će biti preciznost tog sata?*

Rješenje:

Na ekvatoru Zemlje ubrzanje slobodnog pada iznosi $g_e = 9.79\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, dok na polu iznosi $g_p = 9.83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Kako je na ekvatoru period titranja jednak $T = 1\,\mathrm{s}$ to njihalo ima duljinu

$$l = \frac{g_e T_e^2}{4\pi^2} = \frac{9.79\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0.247\,98\,\mathrm{m}$$

pa je period njihala na polu jednak

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_p}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.247\,98\,\mathrm{m}}{9.83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.997\,96\,\mathrm{s}$$

odnosno, za jedan dan će napraviti

$$N = \frac{86400\,\mathrm{s}}{0.997\,96\,\mathrm{s}} = 86577$$

perioda, tj. sat će za svaki titraj pokazivati jednu sekundu, odnosno brzat će za

$$t' = 86577\,\mathrm{s} - 86400\,\mathrm{s} = 177\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{min}\ \text{ i } 57\,\mathrm{s}$$

Primjer 11.3.9 *Na česticu mase* $m = 0.15$ kg *djeluje elastična sila čija je konstanta* $k = 18\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ *i ona titra s amplitudom od* $A = 20$ cm*. Izračunajte potencijalnu i kinetičku energiju čestice kada je ona udaljena od ravnotežnog položaja* $x = 5$ cm *te period titranja.*

Rješenje:

Period titranja elastičnog pera dan je izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.15\,\mathrm{kg}}{18\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0.57\,\mathrm{s}$$

Ukupna energija harmonijskog oscilatora (elastičnog pera) je

$$E_{uk} = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 18\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,(0.2\,\mathrm{m})^2 = 0.36\,\mathrm{J}$$

Potencijalna energija u položaju $x = 5$ cm jednaka je

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 18\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(0.05\,\mathrm{m})^2 = 0.0225\,\mathrm{J} = 22.5\,\mathrm{mJ}$$

pa je kinetička energija jednaka

$$E_{uk} - E_p(x) = 0.36\,\mathrm{J} - 0.0225\,\mathrm{J} = 0.3375\,\mathrm{J}$$

Primjer 11.3.10 *Masa m ispuštena je s visine h na vagu zanemarive težine, obješenu na oprugu konstante opruge k. Sudar se može smatrati potpuno neelastičnim u smislu da se masa zalijepi za posudu i posuda počinje oscilirati. Odredite amplitudu oscilacija vage.*

Rješenje:

Neka je x_0 izduženje opruge kao posljedica deformacijske energije koja je jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = mgh + mgx_0$$

odakle se sređivanjem izraza dobiva

$$x_0^2 - \frac{2mg}{k}x_0 - \frac{2mgh}{k} = 0$$

Rješenja kvadratne jedndžbe su

$$\begin{aligned}
x_{0i} &= \frac{\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2mgh}{k}\right)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}} \\
&= \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{mg}{k}\right)^2 \frac{2kh}{mg}} \\
&= \frac{mg}{k} \pm \left(\frac{mg}{k}\right)\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}} \\
&= \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)
\end{aligned}$$

Iz izraza se vidi da je ravnotežni položaj pomjeten za $x_0 = \frac{mg}{k}$ ispod početnog položaja. Amplituda oscilacija mjerena od ravnotežnog položaja jednaka je

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

Primjer 11.3.11 *Ako čestica izvodi jednostavno harmonijsko gibanje duž x-osi prema zakonu* $x = A sin\left(\omega t\right)$ *odredite vjerojatnost* $dp(x)$ *pronalaska čestice između* x *i* $x + dx$.

Rješenje:

Vjerojatnost pronalaska čestice u nekom intervalu na osi x je proporcionalno vremenu koje ta čestica provede u tom položaju, stoga se može reći da je vjerojatost inverzno proporcionalna brzini gibanja čestice.

$$\frac{dp\left(x\right)}{dx} = \frac{k}{v}$$

gdje je k za sada neodređena konstanta proporcionalnosti. Koristeći izraz za brzinu kao funkciju položaja

$$v\left(x\right) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

funkciju vjerojatnosti može se pisati kao

$$\frac{dp\left(x\right)}{dx} = \frac{k}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Treba još odrediti konstantu k. Ona se određuje normalizacijom distribucije funkcije vjerojatnosti

$$\int\limits_{-A}^{A} dp\left(x\right)dx = \frac{k}{\omega}\int\limits_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = 1$$

Zbog parnosti podintegralne funkcije vrijedi

$$\int\limits_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = 2\int_0^A \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,dx$$

rješavanjem integrala dolazi se do

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\, dx &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{A^2}} \\
\frac{k}{\omega} \int\limits_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \frac{2k}{\omega} \arcsin \frac{x}{\sqrt{A^2}} \Big|_0^A = \frac{2k}{\omega} \left(\arcsin 1 - \arcsin 0 \right) \\
&= \frac{2k}{\omega} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi k}{\omega} = 1
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\omega} &= \frac{1}{\pi} \\
\frac{dp\,(x)}{dx} &= \frac{k}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

Uočava se, obrnuta proporcionalanost za distribuciju funkcije vjerojatnosti u odnosu na amplitudi titranja.

Primjer 11.3.12 *Koristeći distribuciju gustoće vjerojatnosti za jednostavni harmonijski oscilator, izračunajte srednju potencijalnu energiju i srednju kinetičku energiju tijekom titranja.*

Rješenje:

Koristeći izraz za potencijalnu energiju jednostavnog harmonijskog oscilatora

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

srednju energiju definiramo preko distribucije funkcije vjerojatnosti kao

$$\overline{E_p} = \int E_p dp = \int\limits_{-A}^{A} \frac{1}{2} k x^2 \cdot \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Koristeći definiciju položaja jednostavnog harmonijskog oscilatora kao zamjenu slijedi

$$\begin{aligned}
x &= A \sin\alpha \\
dx &= A \cos\alpha \; d\alpha \\
x &= A = A \sin\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\
x &= -A = A \sin\alpha \Longrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

što za integral daje

$$\begin{aligned}
\overline{E_p} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}k\left(A\sin\alpha\right)^2 \cdot \frac{A\cos\alpha\; d\alpha}{\pi\sqrt{A^2-\left(A\sin\alpha\right)^2}} \\
&= \left(\frac{kA^3}{2\pi}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\; d\alpha}{\sqrt{A^2-A^2\sin\alpha^2}} = \left(\frac{kA^3}{2\pi}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\; d\alpha}{A\sqrt{1-\sin\alpha^2}} \\
&= \left(\frac{kA^2}{2\pi}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\; d\alpha = \left(\frac{kA^2}{2\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}kA^2
\end{aligned}$$

gdje je korišten rezultat integrala

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\; d\alpha &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)\; d\alpha = \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left[\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{1}{4}\sin\left(-\pi\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Srednju kinetičku energiju dobiva se iz zakona očuvanja energije

$$\overline{E_k} = \overline{E - E_p} = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

Primjer 11.3.13 *Cilindar mase m može se kotrljati po glatkom vodoravnom stolu s oprugom konstante opruge k pričvršćenom na njega tako da izvodi jednostavno harminijsko gibanje oko položaja ravnoteže. Odredite vremenski period oscilacija.*

Rješenje:

Koristeći zakon očuvanja energije

$$E_{uk} = E_k^{tr} + E_k^{rot} + E_p = const.$$

slijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const.$$

Moment tromosti cilindra jednak je $I = \frac{1}{2}mR^2$ što uz vezu obodne i kutne brzine $\omega = \frac{v}{R}$ daje

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{3}{4}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{3}{4}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const.
\end{aligned}$$

Diferenciranjem izraza dobiva se

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}m\cdot 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}k\cdot 2x\left(\frac{dx}{dt}\right) &= 0 \\
\frac{3}{2}m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + kx &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2k}{3m}\right)x &= 0
\end{aligned}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba harmonijskog titranja sa periodom

$$\omega^2 = \frac{2k}{3m} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{3m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Primjer 11.3.14 *Dva jednostavna njihala duljine* 50 cm *odnosno* 60 cm *vise okomito jedno ispred drugoga. Ako se pokreću istovremeno, odredite vrijeme potrebno da jedan postigne potpuni titraj na drugim.*

Rješenje:
Vremenski periodi njihala su

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \\
T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}
\end{aligned}$$

Neka je vrijeme t u kojem njihala naprave razliku za jedan titraj, odnosno njihalo veće duljine napravi n titraja, a kraće $(n+1)$ titraja.

Broj titranja npr. duljeg njihala je

$$\begin{aligned}
t &= (n+1)\,T_1 = nT_2 \\
\frac{n+1}{n} &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \\
n+1 &= \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}\cdot n \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}-1\right) n = 1 \\
n &= \frac{1}{\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}-1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{60\,\mathrm{cm}}{50\,\mathrm{cm}}}-1} = \frac{1}{1.0954-1} = 10.482
\end{aligned}$$

Potrebno vrijeme je

$$t = nT_2 = n\cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 10.482\cdot 2\pi\sqrt{\frac{0.6\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 16.288\,\mathrm{s}$$

Primjer 11.3.15 *Prilikom ispitivanja elastičnog pera odbojnika vagona djelovanjem sile od $F = 10^4\,\mathrm{N}$, elastično pero odbojnika stisnulo se za $x = 1\,\mathrm{cm}$. Kolikom brzinom se gibao vagon koji udara u zid za ispitivanje odbojnika ako se on stisnuo za $x' = 20\,\mathrm{cm}$. Masa vagona je $m = 20t$.*

Rješenje:

Kinetička energija vagona troši se na sabijanje elastičnog pera i pretvara u njegovu potencijalnu energiju

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E_p = \frac{1}{2}k\left(x'\right)^2$$

gdje je $k-$ konstanta elastičnosti pera koju dobivamo iz

$$F = kx \Longrightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{10^4\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{cm}} = 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

pa je

$$v = \sqrt{\frac{k\,(x')^2}{m}} = \sqrt{\frac{10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(20\,\mathrm{cm})^2}{20000\,\mathrm{kg}}} = 1.4142\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 11.3.16 *Tijelo mase* $m = 50\,\mathrm{g}$ *koje je vezano za kraj opruge izvučeno je iz ravnotežnog položaja za* $A = 20\,\mathrm{cm}$ *silom od* $F = 20\,\mathrm{N}$ *i pušteno. Izračunajte brzinu i ubrzanje kada je tijelo udaljeno od ravnotežnog položaja* $x = 5\,\mathrm{cm}$.

Rješenje:
Sila potrebna za izvlačenje tijela na eloganciju A je

$$F = kA \Rightarrow k = \frac{F}{A} = \frac{20\,\mathrm{N}}{0.2\,\mathrm{m}} = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Jednadžba harmonijskog titranja glasi

$$x\left(t\right) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

no, u trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$ tijelo je u maksimalnom otklonu, amplitudi $x = A$ pa vrijedi

$$A = A\sin\left(\omega \cdot 0 + \varphi\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

pa je jednadžba gibanja

$$x\left(t\right) = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0.05\,\mathrm{kg}}} = 44.72\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Tijelo će biti u trenutku t_1 u položaju $x\left(t_1\right) = 5\,\mathrm{cm}$

$$x\left(t_1\right) = A\cos\omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{x}{A} = \frac{1}{44.72\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}\arccos\frac{1}{4} = 0.03\,\mathrm{s}$$

Brzina v je dana izrazom

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{dx\left(t\right)}{dt} = -A\omega\sin\omega t = -A\omega\sqrt{1-\cos^2\omega t} \\ &= -A\omega\sqrt{1-\frac{x^2\left(t\right)}{A^2}} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2\left(t\right)} \end{aligned}$$

pa je u trenutku t_1

$$v\left(t_1\right) = -\omega\sqrt{A^2 - x^2\left(t_1\right)} = -8.66\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ubrzanje a je dano izrazom

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos\omega t \\ &= -A\omega^2 \frac{x(t)}{A} = -\omega^2 x(t) = -\frac{k}{m} x(t) \end{aligned}$$

pa je u trenutku t_1 ubrzanje

$$a(t_1) = -\frac{k}{m} x(t_1) = -\frac{100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0.05\,\mathrm{kg}} \cdot 0.05\,\mathrm{m} = -100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Napomena, ubrzanje smo mogli dobiti i iz izraza za silu

$$F(t) = ma(t) = -kx(t) \Rightarrow a(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$

što je analogno prethodno dobivenom izrazu preko druge derivacije položaja.

Primjer 11.3.17 *Tijelo harmonički titra amplitudom* $A = 15\,\mathrm{cm}$*, pri čemu za* $T = 2\,\mathrm{s}$ *napravi jednu oscilaciju. Kolika je brzina tijela u trenutku kada je elongacija jednaka polovini amplitude?*

Rješenje:
Kutna brzina harmonijskog titranja jednaka je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,\mathrm{s}} = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$$

Iz jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora, uz početne uvjete $x = A$ za $t = 0\,\mathrm{s}$ imamo

$$x(t) = A\cos\omega t$$

Vrijeme kada je $x = \frac{A}{2}$ iznosi

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega} \arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{s}$$

gdje je dovoljno uzeti jedno od 4 moguća rješenja (zbog simetrije gibanja). Brzina tijela određena je izrazom

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin\omega t$$

pa je u trenutku $t_{\frac{1}{2}}$ iznos brzine

$$v\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = A\omega \sin \omega t_{\frac{1}{2}} = 0.41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Napomena: sva preostala rješenja imaju isti iznos brzine, dva puta prema ravnotežnom položaju i dva puta od ravnotežnog položaja, za pozitivnu i negativnu vrijednost amplitude.

Primjer 11.3.18 *Tijelo mase $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ nalazi se na horizontalnoj podlozi i vezano je za oprugu konstante elastičnosti $k = 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Tijelo izvučemo za $s_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ udesno od ravnotežnog položaja i damo mu udesno početnu brzinu $v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Izračunajte: period, frekvenciju, kutnu frekvenciju, ukupnu energiju tirtranja, amplitudu i početnu fazu. Napišite izraz za elongaciju, brzinu i akceleraciju u ovisnosti o vremenu. U kojem trenutku vremena tijelo dolazi u položaj $s = 0.2\,\mathrm{m}$? Kolika mu je tada brzina i akceleracija? Gubitke zbog trenja zanemariti.*

Rješenje:
Period dobivamo iz izraza

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2\,\mathrm{kg}}{5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1.26\,\mathrm{s}$$

frekvencija je inverzna veličina periodu

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.26\,\mathrm{s}} = 0.8\,\mathrm{s}^{-1} = 0.8\,\mathrm{Hz}$$

Kutna brzna jednaka je

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0.8\,\mathrm{s}^{-1} = 5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Ukupnu energiju dobijemo kao zbroj kinetičke i potencijalne energije u početnom trenutku

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ks_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.2\,\mathrm{kg}\cdot\left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(0.1\,\mathrm{m})^2 = 0.125\,\mathrm{J}$$

Amplitudu titranja možemo dobiti iz izraza za ukupnu energiju, koja je kod neprigušenog titranja konstantna. Iz izraza

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

dobivamo

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.125\,\mathrm{J}}{5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0.22\,\mathrm{m}$$

Jednadžba za eloganciju glasi

$$s\left(t\right) = A \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

pa je u trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$, početna elongacija

$$\begin{aligned} s_0 &= A \sin\left(\omega \cdot 0 + \varphi\right) = A \sin \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{s_0}{A} = \frac{0.1\,\mathrm{m}}{0.22\,\mathrm{m}} = 0.45 \\ \varphi &= \arcsin 0.45 = 0.46\,\mathrm{rad} = 26.56^\circ \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za A, φ, ω dobivamo pomak kao funkciju vremena

$$s\left(t\right) = A \sin\left(\omega t + \varphi\right) = 0.22\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(5t + 0.46\right)$$

gdje je kutna brzina i faza izražena u radijanima. Izrazi za brzinu i akceleraciju kao funkcije vremena se dobivaju

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{ds\left(t\right)}{dt} = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi\right) \\ &= 0.22\,\mathrm{m} \cdot 5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot \cos\left(5t + 0.46\right) \\ &= 1.\,12 \cos\left(5t + 0.46\right) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ a\left(t\right) &= \frac{dv\left(t\right)}{dt} = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi\right) \\ &= -0.22\,\mathrm{m} \cdot \left(5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \sin\left(5t + 0.46\right) \\ &= -5.\,59 \sin\left(5t + 0.46\right) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

te trenutak t' kada je $s = 0.2\,\mathrm{m}$ dobivamo iz

$$\begin{aligned} s\left(t'\right) &= A \sin\left(\omega t' + \varphi\right) = 0.22\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(5t' + 0.46\right) = 0.2\,\mathrm{m} \\ \frac{0.2\,\mathrm{m}}{0.22\,\mathrm{m}} &= 0.89 = \sin\left(5t' + 0.46\right) \\ t' &= \frac{1}{5}\left(\arcsin 0.89 - 0.46\right) = 0.13\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.19 *Izračunajte izvršeni rad pri istezanju elastičnog pera sa duljine* $l_1 = 50\,\mathrm{cm}$ *do* $l_2 = 56\,\mathrm{cm}$ *ako je ravnotežni položaj u* $l_0 = 40\,\mathrm{cm}$*. Iznos konstante opruge je* $k = 120\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$*. Zadatak riješiti preko srednje sile i integralnim načinom.*

Rješenje:

Kod elastičnog pera sila je proporcionalna udaljenosti kraja opruge od svog ravnotežnog položaja $F = ks$, gdje je $s_i = l_0 - l_i$. Srednja sila jednaka je srednjoj vrijednosti početne i konačne sile. Tada je izvršeni rad

$$\begin{aligned} A &= \overline{F} \cdot \Delta s = \frac{1}{2}\left(F_1 + F_2\right)\left(s_2 - s_1\right) = \frac{1}{2}\left[ks_2 - ks_1\right] \cdot \left(s_2 - s_1\right) \\ &= \frac{k}{2}\left(s_2^2 - s_1^2\right) = \frac{120\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2} \cdot \left[(16\,\mathrm{cm})^2 - (10\,\mathrm{cm})^2\right] = 0.94\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Integralnom metodom imamo

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F ds = \int_{s_1}^{s_2} ksds = k\int_{s_1}^{s_2} sds = \frac{k}{2}s^2 \mid_{s_1}^{s_2} = \frac{k}{2}\left(s_2^2 - s_1^2\right) = 0.94\,\mathrm{J}$$

Primjer 11.3.20 *Horizontalna elastična opruga sabijena je od svog ravnotežnog položaja za* $x = 10\,\mathrm{cm}$ *kockom mase* $m = 0.4\,\mathrm{kg}$ *a zatim puštena da odbaci kocku u horizontalnom pravcu. Pri tome kocka klizi po horizontalnoj ravnini i zaustavi se nakon* $s = 0.5\,\mathrm{m}$*. Izračunajte koeficijent trenja* μ *između kocke i ravnine. Konstanta opruge iznosi* $k = 80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$*. Masu opruge zanemarite.*

Rješenje:

Prilikom sabijanja opruge tijelo dobiva potencijalnu energiju koja iznosi

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Kada se opruga pusti ona će odbaciti kocku u horizontalnom pravcu. Zbog postojanja sile trenja između kocke i podloge, kocka će se zaustaviti kada se njena cjelokupna energija utroši na rad protiv sile trenja. Taj rad sile trenja iznosi

$$W_{tr} = F_{tr}s = \mu mgs$$

Izjednačavanjem ovih energija dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= \mu mgs \\ \mu &= \frac{kx^2}{2mgs} = \frac{80\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (10\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 0.4\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.5\,\mathrm{m}} = 0.2 \end{aligned}$$

Primjer 11.3.21 *Na vertikalno postavljenu oprugu duljine l_0 u trenutku $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ stavimo predmet mase m i sustav počinje titrati početnom brzinom $v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Odredite elongaciju kao funkciju vremena.*

Rješenje:
Jednadžba gibanja sustava glasi:

$$\begin{aligned} \sum_i F_i &= -ks + F_0 = ma = m\ddot{s} \\ \ddot{s} + \frac{k}{m}s &= \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

koristeći izraz $\omega^2 = \frac{k}{m}$ dobivamo $\ddot{s} + \omega^2 s = \frac{F_0}{m}$

Dobivena jednadžba je nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda. Opće rješenje ove jednadžbe dobivamo tako da se općem rješenju homogene jednadžbe pribroji jedno od partikularnih rješenja nehomogene jednadžbe. Opće rješenje homogene jednadžbe $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$, tj. jednadžbe jednostavnog harmonijskog oscilatora glasi:

$$s\,(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

a partikularno rješenje nehomogene jednadžbe glasi

$$s = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

pa je opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe

$$s\,(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

odnosno funkcija brzine je

$$v\,(t) = \dot{s}\,(t) = \frac{ds\,(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

Iz početnih uvjeta zadatka $t = 0\,\mathrm{s}$, $s = 0\,\mathrm{m}$, $\dot{s} = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ dobivamo

$$\begin{aligned} s(0) &= A\cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = A\cos\varphi + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = 0 \\ \dot{s}(0) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = 0 \end{aligned}$$

odnosno za

$$\varphi = 0 \Longrightarrow A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

pa je jednadžba elongacije

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t)$$

Postavimo li ishodište koordinate x u položaj

$$x = s - \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

dobili bi jednadžbu

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t$$

što je jednostavno harmoničko titranje.

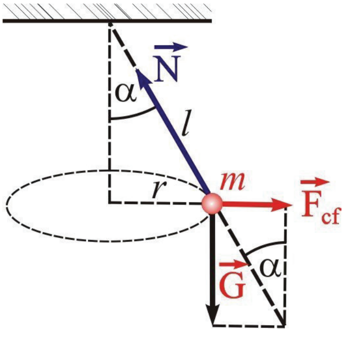
Primjer 11.3.22 *Odredite ophodno vrijeme (period) konusnog njihala duljine $l = 0.3\,\mathrm{m}$, kojemu nit pri gibanju zatvara s vertikalnom osi kut $\alpha = 30°$. (slika 11.4.)*

Rješenje:

Konusno njihalo je sitno tijelo (materijalna točka) na niti konstantne duljine koja, stavljena u gibanje u horizontalnoj ravnini opisuje kružnicu polumjera

$$r = l\sin\alpha$$

pri čemu na tijelo djeluju: centripetalna sila $F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$, težina tijela $G = mg$ i napetost niti N. Iz slike dobivamo:



Slika 11.4.

$$F_{cf} = mg\tan\alpha = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}$$

odakle je

$$v^2 = \frac{mg\tan\alpha}{m} l\sin\alpha = gl\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

odnosno brzina

$$v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}} \cdot \sin\alpha$$

pa iz izraza za period T i brzinu v imamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l\sin\alpha}{\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}} \cdot \sin\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{\frac{gl}{\cos\alpha}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{0.3\,\mathrm{m}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.02\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Uočimo da iz izraza za konusno njihalo, za male kutove $\alpha \approx 0$ dobivamo izraz za matematičko njihalo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(jer je $\cos\alpha \approx 1$, kada je $\alpha \approx 0$).

Primjer 11.3.23 *Kugla polumjera $R = 10\,\mathrm{cm}$ obješena je na niti duljine $l = 50\,\mathrm{cm}$ i njiše se malim amplitudama. Izračunajte period tog fizičkog njihala. Aproksimirajte kuglu materijalnom točkom i izračunajte period smatrajući njihalo matematičkim te usporedite dobivene rezultate.*

Rješenje:

Period fizičkog njihala računamo po formuli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\,L}}$$

Moment tromosti kugle s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase jednak je $I = \frac{2}{5}mR^2$, te je prema Steinerovom poučku, moment tromosti s obzirom na os oko koje njiše njihalo

$$I = I_{CM} + md^2 = \frac{2}{5}mR^2 + m\,(l+R)^2$$

odakle dobivamo period

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2 + m\left(l+R\right)^2}{mg\left(l+R\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l+R+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l+R}}{g}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{m} + 0.1\,\mathrm{m} + \frac{2}{5}\frac{(0.1\,\mathrm{m})^2}{0.5\,\mathrm{m}+0.1\,\mathrm{m}}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.56\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Smatramo li njihalo matematičkim period je

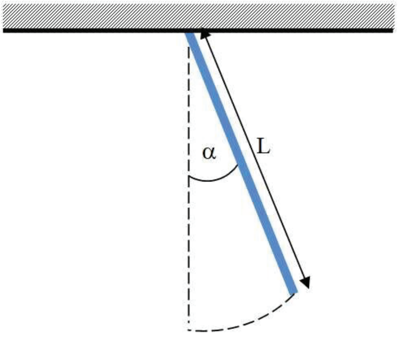
$$
T' = 2\pi\sqrt{\frac{l+R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{m}+0.1\,\mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.55\,\mathrm{s}
$$

Odavdje možemo zaključiti da za $l \gg R$ kugla polumjera R obješena na niti duljine l može doista dobro aproksimirati matematičko njihalo, tim bolje što je $\frac{R^2}{l+R}$ manje. U našem je slučaju relativna pogreška sam

$$
\Delta = \frac{T-T'}{T} = \frac{1.56\,\mathrm{s} - 1.55\,\mathrm{s}}{1.56\,\mathrm{s}} = 0.0055 = 0.55\%
$$

Primjer 11.3.24 *Tanki homogeni štap mase M i duljine L njiše se na jednom svom kraju kao fizičko njihalo (vidi sliku????). S obzirom da je moment tromosti jednolikog štapa oko jednog kraja $I = \frac{1}{3}ML^2$, izvedite jednadžbu za period oscilatornog gibanja za male kutove. Kolika bi bila duljina l jednostavnog njihala koji ima isti period kao njihajući štap?*

Rješenje:



Slika 11.5.

Uzmajući u obzir jednadžbu za moment tromosti štapa $I = \frac{1}{3}ML^2$ i udaljenost točke rotacije od centra mase $D = \frac{L}{2}$ slijedi

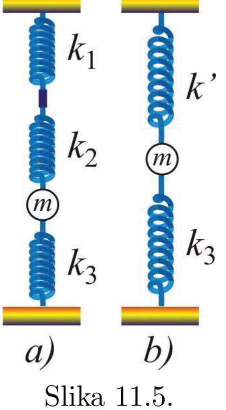
$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\alpha &= 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{Mg \cdot \frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2}\alpha &= 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\alpha &= 0 \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{3g}{2L} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \end{aligned}$$

Uspoređujući sa izrazom za period jednostavnog njihala $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ slijedi da je reducirana duljina ovog fizičkog njihala jednaka $l = \frac{2}{3}L$.

Primjer 11.3.25 *Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnog sustava koji se sastoji od materijalne točke mase m i triju opruga spojenih kao na slici (slika 11.5.)*



Slika 11.5.

Rješenje:

Opruge konstanti k_1 i k_2 spojene su serijski, pa je ekvivalentna konstanta k' jednaka

$$\begin{aligned} \frac{1}{k'} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \\ k' &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

Sustav prikazan na slici možemo zamijeniti ekvivalentnim sustavom. Opruge s konstantama k' i k_3 spojene su paralelno pa je ekvivalentna konstanta

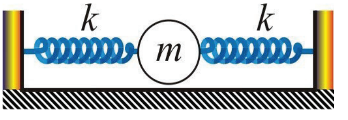
$$k = k' + k_3 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3 = \frac{k_1 k_2 + k_3 (k_1 + k_2)}{k_1 + k_2}$$

Ovaj sustav razmatramo kao materijalnu točku mase m na opruzi konstante k. Kružna frekvencija je onda

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 + k_3 (k_1 + k_2)}{m (k_1 + k_2)}}$$

Primjer 11.3.26 *Predmet mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ vezan je dvjema jednakim oprugama tako da može kliziti horizontalnom ravninom. Konstanta opruge iznosi $k = 50\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, a koeficijent trenja klizanja između tijela i podloge iznosi $\mu = 0.2$. Pomaknimo tijelo iz položaja ravnoteže ($s = 0\,\mathrm{m}$) za $s_0 = 10\,\mathrm{cm}$ i pustimo da titra s početnom brzinom jednakom nula. Odredite elongaciju tijela nakon prvog perioda? (slika 11.6.)*

Rješenje:



Slika 11.6.

Za vrijeme $0 < t \leq \frac{T}{2}$ tijelo se giba s desna na lijevo i pri tome na njega djeluju sile jedne i druge opruge nalijevo ($ks + ks = 2ks$) i sila trenja nadesno (suprotno gibanju tijela) (μmg).

Jednadžba gibanja glasi:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -2ks + \mu mg \\ \ddot{s} + \omega_0^2 s &= \mu g \end{aligned}$$

gdje je

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} = \frac{2 \cdot 50\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{1\,\mathrm{kg}} = 100\,\mathrm{s}^{-2} \Longrightarrow \omega_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$$

Rješenje ove nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda je

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Konstante A i φ određujemo iz početnih uvjeta:

$$t = 0\,\mathrm{s};\ \ s(0) = s_0 = 0.1\,\mathrm{m};\ \ \dot{s}(0) = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

odakle dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
s(t) &= A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\
s(0) &= A\cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = A\cos\varphi + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = s_0 \\
\dot{s}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\
\dot{s}(0) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Longrightarrow \varphi = 0 \\
A &= s_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}
\end{aligned}$$

pa je elongacija u tom vremenskom intervalu

$$\begin{aligned}
s(t) &= \left(s_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\
s(t) &= \left(0.1\,\mathrm{m} - \frac{0.2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{100\,\mathrm{s}^{-2}}\right)\cos(10t) + \frac{0.2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{100\,\mathrm{s}^{-2}} \\
s(t) &= 0.080\,38\,\mathrm{m}\cos(10t) + 0.019\,62\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

U trenutku

$$t' = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{10\,\mathrm{s}^{-1}} = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s} = 0.31\,\mathrm{s}$$

elongacija iznosi

$$\begin{aligned}
s(t') &= \left(s_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\pi + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = -s_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \\
&= -0.1\,\mathrm{m} + \frac{2 \cdot 0.2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{100\,\mathrm{s}^{-2}} = -0.06\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

U tom trenutku tijelo se zaustavi i počne vraćati nadesno. Sada se promijeni smjer sile trenja i jednadžba gibanja glasi

$$\begin{aligned}
m\ddot{s}_1 &= -2ks_1 - \mu m g \\
\ddot{s}_1 + \omega_0^2 s_1 &= -\mu g
\end{aligned}$$

Rješenje ove jednadžbe je elongacija s'

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= A_1\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\
\dot{s}_1(t) &= \frac{ds_1(t)}{dt} = -A_1\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)
\end{aligned}$$

pa iz uvjeta

$$\begin{aligned} s_1(t') &= s(t') = -s_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \\ \dot{s}_1(t') &= 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Longrightarrow \varphi_1 = 0 \\ s_1(t') &= A_1 \cos\pi - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = -s_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \Longrightarrow A_1 = s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

dobivamo

$$s_1(t) = \left(s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

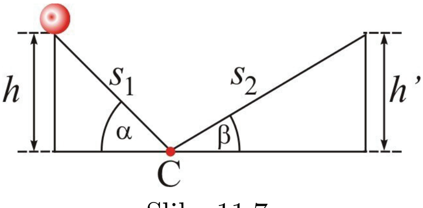
U trenutku perioda $t'' = T$ elangacija iznosi

$$\begin{aligned} s_1(T) &= \left(s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 T) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\ &= \left(s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\ &= \left(s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos(2\pi) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2} - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = s_0 - \frac{4\mu g}{\omega_0^2} \\ &= 0.1\,\mathrm{m} - \frac{4 \cdot 0.2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{100\,\mathrm{s}^{-2}} = 0.02\,\mathrm{m} \approx 2.2\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.27 *Izračunajte period titranja malene kuglice prema slici 11.7. ako su $h = 50\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$ i $\beta = 30°$. Zanemarite rotacijsku energiju kuglice, gubitak energije pri udaru u kutu i trenje.*

Rješenje:

Iz zakona o očuvanju energije proizilazi da je visina s koje kuglica krene h jednaka visini na koju će se kuglica popeti h' (to vrijedi jer smo zanemarili sve gubitke energije), a iz trigonometrijskih odnosa dobivamo



Slika 11.7.

$$s_1 = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}at_1^2$$

gdje je $a = g\sin\alpha$, a t_1 vrijeme potrebno da kuglica dođe u točku C.

Dakle

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}gt_1^2\sin\alpha$$

pa je

$$t_1^2 = \frac{2h}{g\sin^2\alpha} \Longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\alpha}$$

slično imamo i za drugu stranu

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{h'}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{1}{2}at_2^2 \\ \frac{h}{\sin\beta} &= \frac{1}{2}gt_2^2\sin\beta \\ t_2^2 &= \frac{2h}{g\sin^2\beta} \Longrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\beta} \end{aligned}$$

pa je ukupni period titranja, odnosno vrijeme potrebno da se kuglica prati na početni položaj, jednako

$$\begin{aligned} T &= 2(t_1+t_2) = 2\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\alpha} + \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\beta}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{2\cdot 50\,\mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right) = 21.8\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.28 *Pretpostavimo da je duž osi vrtnje Zemlje prokopan tunel s jednog kraja Zemlje na drugi. Blizu Zemljine površine duž meridijana prolazi putanja satelita. Tijelo počinje slobodno padati kroz tunel u trenutku kada se satelit nalazi iznad otvora tunela. Što će prije stići do drugog kraja tunela, tijelo ili satelit?*

Rješenje:

Na udaljenosti r od središta Zemlje na tijelo mase m djeluje gravitacijska sila

$$\vec{F} = -\gamma\frac{mM_1}{r^2}\vec{r}_0$$

gdje je M_1masa Zemlje unutar kugle polumjera r pa je

$$\frac{M_1}{M_z} = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho_z r^3}{\frac{4\pi}{3}\rho_z R_z^3} = \frac{r^3}{R_z^3}$$

uz M_z masu Zemlje i R_z polumjer Zemlje. Gravitacijska sila je onda proporcionalna udaljenosti od središta Zemlje

$$\overrightarrow{F} = -\gamma \frac{mM_z}{R_z^3}\overrightarrow{r}$$

Tijelo harmonijski titra u odnosu prema središtu Zemlje, s periodom

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &= -\gamma \frac{mM_z}{R_z^3}\overrightarrow{r} = -k\overrightarrow{r} \Longrightarrow k = \gamma\frac{mM_z}{R_z^3} \\ T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma\frac{mM_z}{R_z^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\gamma M_z}} \end{aligned}$$

Za satelit koji se giba blizu površine Zemlje, gravitacijska sila mora biti jednaka centrifugalnoj sili

$$F_{cf} = m\omega^2 R_z = \frac{4\pi^2 mR_z}{T_2^2} = \gamma\frac{mM_z}{R_z^2}$$

odavde je ophodno vrijeme satelita

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 mR_z}{\gamma\frac{mM_z}{R_z^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\gamma M_z}}$$

Tijelo i satelit će istovremeno stići do drugog kraja tunela, jer je $T_1 = T_2$.

Primjer 11.3.29 *Gustoća tekućine povećava se linearno s dubinom, tako da je na površini gustoća tekućine ρ_0, a na dubini d je $2\rho_0$. Koliki su period titranja i amplituda kuglice gustoće $2\rho_0$ ispuštene na dubini $\frac{d}{2}$ s početnom brzinom $v_0 = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Trenje kuglice zanemarite.*

Rješenje:

Ovisnost gustoće tekućine ρ o dubini x možemo zadati relacijom

$$\rho(x) = ax + b$$

gdje se a i b određuju iz početnih uvjeta

$$\begin{aligned}
\rho(0) &= \rho_0 = a\cdot 0 + b = b \\
\rho(d) &= 2\rho_0 = ad + b = ad + \rho_0 \Longrightarrow a = \frac{\rho_0}{d} \\
\rho(x) &= \frac{\rho_0}{d}x + \rho_0 = \rho_0\left(\frac{x}{d} + 1\right)
\end{aligned}$$

Sila F koja djeluje na kuglicu volumena V gustoće $\rho_k = 1.1\rho_0$, na dubini x jednaka je razlici težine i sile uzgona

$$\begin{aligned}
F &= G - U = mg - \rho_t V g = \rho_k V g - \rho(x) V g \\
&= Vg\left[\rho_k - \rho(x)\right]
\end{aligned}$$

Primjenom dobivene relacije za gustoću tekućine imamo

$$\begin{aligned}
F &= m\frac{d^2x}{dt^2} = Vg\left[2\rho_0 - \left(\rho_0\frac{x}{d} + \rho_0\right)\right] = Vg\rho_0\left[1 - \frac{x}{d}\right] \\
&= \frac{Vg\rho_0}{d}(d - x)
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \rho_k V\frac{d^2x}{dt^2} = 2\rho_0 V\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Vg\rho_0}{d}(d-x) \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{g}{2d}(d-x)
\end{aligned}$$

Uvođenjem supstitucije

$$\begin{aligned}
y &= d - x \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{dx}{dt};\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}
\end{aligned}$$

za jednadžbu gibanja u novom sustavu dobivamo

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{g}{2d}y \\
\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{2d}y &= 0
\end{aligned}$$

Ovo je jednadžba neprigušenog harmonijskog titranja pa je kružna frekvencija jednaka

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2d}}$$

a period titranja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$\begin{aligned} y(t) &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y}(t) &= A\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

gdje se A i φ određuju iz rubnih uvjeta. Rubni uvjeti su

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{d}{2} \Longrightarrow y(0) = d - x(0) = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \\ \dot{x}(0) &= 0 \Longrightarrow \dot{y}(0) = 0 \end{aligned}$$

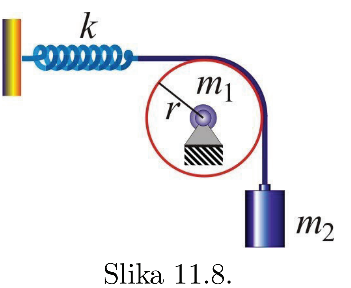
iz

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= -A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = -A\omega\cos\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ y(0) &= \frac{d}{2} \\ y(0) &= A\sin\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\frac{\pi}{2} = \frac{d}{2} \Longrightarrow A = \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.30 *Titrajni sustav sastoji se od homogenog diska mase $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ i polumjera r koji se može okretati oko horizontalne osi, opruge konstante $k = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ i utega mase $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$. (slika 11.8.) Kolika je kružna frekvencija sustava ako sustav harmonijski titra? Sva trenja zanemariti?*

Rješenje:
Kinetička energija sustava je

$$\begin{aligned} E_k &= E_k^{tr} + E_k^{rot} = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$



Slika 11.8.

Za homogeni disk je

$$I = \frac{1}{2}m_1r^2$$

i veza između veličina rotacije i translacije
je $s = r\varphi$, te $\dot{s} = r\dot{\varphi}$ pa uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1 r^2\cdot\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right)\dot{s}^2 = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right) r^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Elastična potencijalna energija iznosi

$$E_p = \frac{1}{2}ks^2$$

pa je maksimalna potencijalna energija u položaju amplitude

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

jednaka maksimalnoj kinetičkoj energiji kad je sustav u položaju ravnoteže

$$\begin{aligned} (E_k)_{\max} &= \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right) r^2\dot{\varphi}_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right) A^2\omega^2 \\ \frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right) A^2\omega^2 \end{aligned}$$

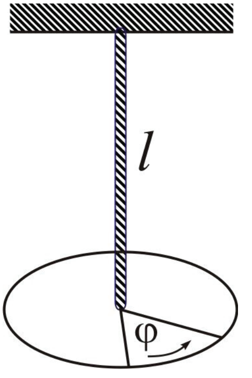
pa je

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m_2 + \frac{1}{2}m_1}} = 4.26\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2 + \frac{1}{2}m_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{3\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2}5\,\mathrm{kg}}} = 0.68\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.31 *Torziono se njihalo sastoji od homogenog diska mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ i polumjera $r_d = 0.05\,\mathrm{m}$, koji visi na čeličnoj žici duljine $l = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $d_ž = 2\,\mathrm{mm}$. (slika 11.9.) Modul torzije čelika iznosi $G = 70G\,\mathrm{Pa}$. Kolika je konstanta torzije žice i period njihala?*

Rješenje:

Moment elastičnih sila u žici proporcionalan je kutu φ za koji se disk zakrene.



Slika 11.9.

$$M_{\check{z}} = -D\varphi$$

gdje je D konstanta torzije ovisna o materijalu i dimenzijama žice. Modul smicanja G je konstanta koja ovisi samo o elastičnim svojstvima materijala. Torzija žice ili štapa poseban je primjer smicanja. Kut torzije φ proporcionalan je momentu (para) vanjskih sila M_p.

$$\varphi = \frac{1}{G}\frac{2l}{\pi r_{\check{z}}^4}M$$

gdje je l duljina žice, a $r_{\check{z}}$ polumjer poprečnog presjeka žice. Konstantu torzije dobivamo iz veze između konstante torzije i modula torzije

$$\begin{aligned} D &= \frac{\pi r^4}{2l}G = \frac{\pi r_{\check{z}}^4}{2l}G \\ &= \frac{\pi \cdot \left(10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^4}{2 \cdot 5\,\mathrm{m}} \cdot 7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa} = 0.02\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$

Kako je moment inercije homogenog diska $I = \frac{1}{2}mr^2$ za period titranja dobivamo

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr_d^2}{2D}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{5\,\mathrm{kg} \cdot (0.05\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot 0.02\,\mathrm{N\,m}}} = 3.35\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Primjer 11.3.32 *Kolika mora biti duljina niti o koju je obješena kuglica čiji je promjer $d_1 = 4\,\mathrm{cm}$, da bismo pri određivanju perioda malih titranja kuglicu s niti mogli smatrati matematičkim njihalom, pri čemu je dopušteno odstupanje od 1% u aproksimaciji matematičkog njihala.*

Rješenje:

Period titranja matematičkog njihala $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, dok je period titranja fizičkog njihala $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$. Moment inercije kuglice je prema Steinerovu poučku

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = ml^2\left[1 + \frac{2r^2}{5l^2}\right]$$

gdje je $l = L + r$, pri čemu je L duljina niti, a $r = \frac{d_1}{2}$ polumjer kuglice. Period titranja fizičkog njihala je

$$\begin{aligned}
T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{ml^2\left[1 + \frac{2r^2}{5l^2}\right]}{mgl}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{l\left[1 + \frac{2r^2}{5l^2}\right]}{g}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2r^2}{5l^2}} \\
&= T_1\sqrt{1 + \frac{2r^2}{5l^2}}
\end{aligned}$$

Dopuštena pogreška je

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{T_1\sqrt{1 + \frac{2r^2}{5l^2}} - T_1}{T_1} = \sqrt{1 + \frac{2r^2}{5l^2}} - 1 \\
(\Delta + 1)^2 &= 1 + \frac{2r^2}{5l^2} \\
\frac{r}{l} &= \sqrt{\frac{5}{2}\left[(\Delta + 1)^2 - 1\right]}
\end{aligned}$$

Uz uvjet da je dopuštena pogreška manja od 1% vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{r}{l} &\leq \sqrt{\frac{5}{2}\left[(0.01 + 1)^2 - 1\right]} = 0.22 \\
l &\geq \frac{r}{0.22} = \frac{0.02\,\mathrm{m}}{0.22} = 0.09\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

odnosno duljina niti L

$$L = l - r \geq 9\,\mathrm{cm} - 2\,\mathrm{cm} = 7\,\mathrm{cm}$$

Primjer 11.3.33 *Fizičko se njihalo u obliku diska, promjera r, njiše oko horizontalne osi okomite na disk, koja prolazi na udaljenosti l od središta diska. (slika 11.10.). Koliki je period njihala ako je:*

a) $l = r$*?*
b) $l \gg r$*?*
c) Kolika bi trebala biti udaljenost l da bi period njihala bio minimalan?

Rješenje:

Iz perioda fizičkog njihala $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$, te izraza za moment tromosti homogenog diska $I = \frac{1}{2}mr^2$ i Steinerova poučka

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2 = \frac{m}{2}\left(r^2 + 2l^2\right)$$

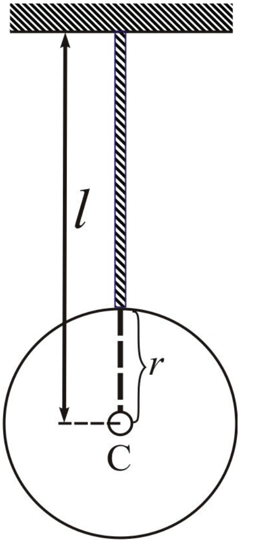
dobivamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{2}\left(r^2+2l^2\right)}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2+2l^2}{2gl}}$$

a) $l = r \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2+2r^2}{2gr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

b) $l \gg r \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2+2l^2}{2gl}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

c) Period za njihalo je minimalan, ako izraz za period u ovisnosti o duljini l zadovoljava uvjet



Slika 11.10.

$$\frac{dT}{dl} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dl} &= 2\pi\frac{d}{dl}\sqrt{\frac{r^2+2l^2}{2gl}} = 2\pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gl}{r^2+2l^2}}\cdot\frac{d}{dl}\left(\frac{r^2+2l^2}{2gl}\right)\right] \\ &= \pi\sqrt{\frac{2gl}{r^2+2l^2}}\cdot\frac{2l^2-r^2}{2gl^2} = 0\end{aligned}$$

Ovaj izraz je jednak nuli kada je $l = 0$, što nije fizikalno rješenje za zadani problem, a drugo rješenje je

$$l = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Primjer 11.3.34 *Na jednodimenzionalni harmonijski oscilator kružne frekvencije ω_0 djeluje na masu m u konačnom vremenskom intervalu τ konstantna vanjska sila F. Odredite amplitudu titranja nakon što je vanjska sila prestala djelovati, ako je u početnom trenutku $t = 0$, položaj $x = 0\,\mathrm{m}$ i brzina $v_0 = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.*

Rješenje:

Jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora u vremenu $0 \leq t \leq \tau$ je

$$\sum_i F_i = -kx + F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Uvrštavajući izraz za nesmetani harmonijski oscilator $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ dobivamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

glasi

$$x_h(t) = A_1 \sin\omega_0 t + B_1 \cos\omega_0 t$$

a partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$x_p = \frac{F}{m\omega_0^2}$$

pa je ukupno rješenje jednako

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin\omega_0 t + B_1 \cos\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2} \\ v_1(t) &= \dot{x}_1(t) = A_1\omega_0 \cos\omega_0 t - B_1\omega_0 \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Početni (ili rubni) uvjeti glase

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0\,\mathrm{m} \\ v_1(0) &= \dot{x}_1(0) = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A_1 \sin(\omega_0 \cdot 0) + B_1 \cos(\omega_0 \cdot 0) + \frac{F}{m\omega_0^2} = B_1 + \frac{F}{m\omega_0^2} = 0 \\ B_1 &= -\frac{F}{m\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0) - B_1\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0) = A_1\omega_0 = 0 \\ A_1 &= 0 \end{aligned}$$

pa je u vremenu $0 \leq t \leq \tau$ elongacija opisana izrazom

$$\begin{aligned} x_1(t) &= B_1 \cos\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2} = -\frac{F}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2} \\ &= -\frac{F}{m\omega_0^2}(\cos\omega_0 t - 1) \end{aligned}$$

Budući da je vanjska sila prestala djelovati, tj. za $t > \tau$ jednadžba gibanja je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

čije rješenje je

$$x_2(t) = A_2 \sin\omega_0 t + B_2 \cos\omega_0 t$$

Kako funkcije $x(t)$ i $\frac{dx(t)}{dt}$ moraju biti neprekidne funkcije, u trenutku $t = \tau$ vrijedi

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= x_2(\tau) \\ \frac{dx_1(\tau)}{dt} &= \frac{dx_2(\tau)}{dt} \end{aligned}$$

što daje sustav jednadžbi iz kojih određujemo konstante A_2 i B_2

$$\begin{aligned} -\frac{F}{m\omega_0^2}(\cos\omega_0\tau - 1) &= A_2 \sin\omega_0\tau + B_2 \cos\omega_0\tau \\ \frac{F}{m\omega_0^2}\sin\omega_0\tau &= A_2\omega_0 \cos\omega_0\tau - B_2\omega_0 \sin\omega_0\tau \end{aligned}$$

čije rješenje je

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{F}{m\omega_0^2}\sin\omega_0\tau \\ B_2 &= \frac{F}{m\omega_0^2}(\cos\omega_0\tau - 1) \end{aligned}$$

pa je amplituda titranja

$$A = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} = \frac{F}{m\omega_0^2}\sqrt{2(1-\cos\omega_0\tau)} = \frac{2F}{m\omega_0^2}\sin\frac{\omega_0\tau}{2}$$

Primjer 11.3.35 *Amplituda harmonijskog oscilatora u sredstvu s otporom smanji se od početne vrijednosti nakon n titraja za faktor $\frac{1}{e}$. Odredite omjer perioda titranja T-tog oscilatora, prema periodu T_0 koji bi imao isti oscilator kada bi otpor zanemarili.*

Rješenje:

Amplituda titranja zadana je izrazom $A = A_0 e^{-\delta t}$, gdje je A_0 amplituda titranja u početnom trenutku. Nakon n titraja amplituda

$$A_n = A_0 e^{-1}$$

pa je vrijeme potrebno za n titraja $t = \frac{1}{\delta}$. Za kružnu frekvenciju prigušenog titranja vrijedi

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

pa je period

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}}$$

Kako je period titranja $T = \frac{t}{n} = \frac{1}{n\delta} = \frac{2\pi}{\omega}$ pri čemu je konstanta

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\delta} &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}} \\ \frac{k}{m} - \delta^2 &= 4\pi^2 n^2 \delta^2 \\ \delta^2 &= \frac{\frac{k}{m}}{1 + 4\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

pa je omjer perioda titranja uz $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{T_0} &= \frac{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\delta^2}}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{k}{m}-\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\frac{k}{m}}{1+4\pi^2n^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{1}{1+4\pi^2n^2}\right)}} \\
&= \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2\left(\frac{4\pi^2n^2}{1+4\pi^2n^2}\right)}} = \frac{\omega_0}{\omega_0}\sqrt{\frac{1+4\pi^2n^2}{4\pi^2n^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2n^2}}
\end{aligned}
$$

Za veliki broj titraja n izraz možemo razviti u Taylorov red pa je traženi izraz omjera perioda

$$
\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2n^2}
$$

11.4 Zadatci

Problem 11.4.1 *Klip motora automobila ima hod* 55.5 mm *i masu* 360 g*. Uz pretpostavku da gibanje klipa u cilindru motora možemo aproksimirati jednostavnim harmonijskim titranjem, kolika je maksimalna brzina i akceleracija klipa pri vrtnji motora s* $3000\frac{okr}{\mathrm{min}}$*? Kolika je pritom maksimalna sila na klip?*

Rezultat: $v_m = 8.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ a_m = 2.74\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ F_m = 985\,\mathrm{N}$.

Problem 11.4.2 *Tijelo mase m obješeno o spiralnu oprugu uzrokuje produljenje opruge* 4 cm*. Koliko titraja napravi to tijelo u* 60 s *kad ga se pobudi na vertikalno harmonijsko titranje?*

Rezultat: $n = 150$ titraja.

Problem 11.4.3 *Nerastegnuta opruga duljine L pričvršćena je u horizontalnom položaju na oba kraja, a zatim prerezana na* $\frac{L}{4}$*. Na tom je mjestu pričvršćeno tijelo (za obakraja opruge) pomaknuto iz položaja ravnoteže i ostavljeno da titra po horizontalnoj podlozi bez trenja. Potrebno je izračunati omjer perioda titranja tog sustava i iste (neprerezane) opruge opterećene istim tijelom, ali u vertikalnom smjeru.*

Rezultat: $\frac{T}{T_v} = 0.433$

Problem 11.4.4 *Jedna opruga opterećena utegom produlji se* 4 cm*, a druga opterećena istim utegom* 5 cm*. Koliki je period titranja serijski spojenih opruga opterećenih istim utegom?*

Rezultat: $T = 0.620\,\mathrm{s}$.

Problem 11.4.5 *Uteg mase srednje vrijednosti* $m = 8\,\mathrm{kg}$ *obješen je na donjem kraju elastične opruge. Mjerenjem pomoću zaporne ure određeno je da 10 uzastopnih titraja traje* 10.41 s *(srednja vrijednost). Odredite konstantu k opruge i relativnu i apsolutnu pogrešku mjerenja. Dokažite da za relativnu pogrešku vrijedi izraz:*

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta T}{T}$$

gdje je m masa utega, a T period titranja. U mjerenju maksimalna apsolutna pogreška iznosi $\Delta m = 0.001\,\mathrm{kg}$*, a* $\Delta T = 0.02\,\mathrm{s}$.

Rezultat: $k = (291.4 \pm 11)\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
(Točnost mjerenja vremena jako utječe na pogrešku).

Problem 11.4.6 *U trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$ jednostavni harmonijski oscilator udaljen je od osi x od svog ravnotežnog položaja za $+6\,\mathrm{cm}$ i giba se brzinom $v_x = 5\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Odredite početnu fazu titranja i amplitudu ako je period njegova titranja jednak $T = 2\,\mathrm{s}$.*

Rezultat: $\varphi = 50.19°$, $A = 7.81\,\mathrm{cm}$.

Problem 11.4.7 *Posuda s utezima visi na opruzi i titra periodom $T_0 = 0.5\,\mathrm{s}$. Dodavanjem utega u posudu period titranja se promijeni na $T_1 = 0.6\,\mathrm{s}$. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega?*

Rezultat: $\Delta l = 2.7\,\mathrm{cm}$.

Problem 11.4.8 *Odredite omjer potencijalne i kinetičke energije materijalne točke koja harmonijski titra, kao funkciju vremena:*

a) u općenitom slučaju,

b) uz početne uvjete $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $\varphi_0 = 0$,

c) uz početne uvjete $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Rezultat: **a)** $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2(\omega t + \varphi_0)$; **b)** $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2 \omega t$**; c)** $\frac{E_p}{E_k} = ctg^2 \omega t$**;**

Problem 11.4.9 *Koliki je omjer perioda vertikalnih titranja tijela vezanog za dvije jednake opruge ako se serijski spoj opruga zamijeni paralelnim?*

Rezultat: $\frac{T_s}{T_p} = 2$.

Problem 11.4.10 *Kuglica mase $m = 20\,\mathrm{g}$, pričvršćena na oprugu elastičnosti $k = 8\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, harmonijski titra amplitudom A. Na udaljenosti $\frac{A}{2}$ od položaja ravnoteže postavi se masivna pregrada, od koje se kuglica savršeno elastično odbija. Odredite period titranja.*

Rezultat: $T = 0.21\,\mathrm{s}$.

Problem 11.4.11 *Knjiga leži na horizontalnoj podlozi koja jednostavno harmonijski titra u horizontalnom smjeru i pri tom ima amplitudu $A = 1\,\mathrm{m}$. Kolika je maksimalna frekvencija tog gibanja pri kojoj još neće doći do klizanja knjige po podlozi? Koeficijent trenja iznosi $\mu = 0.5$.*

Rezultat: $f_{\mathrm{max}} = 0.35\,\mathrm{Hz}$.

Problem 11.4.12 *Istodobno su zanjihana dva njihala, za čije duljine vrijedi $l_1 - l_2 = 22\,\mathrm{cm}$. Nakon nekog vremena jedno je njihalo načinilo $N_1 = 30$, a drugo $N_2 = 36$ njihaja. Odredite njihove duljine.*

Rezultat: $l_1 = 72\,\mathrm{cm}$, $l_2 = 50\,\mathrm{cm}$.

Problem 11.4.13 *Matematičko se njihalo dugo* $60\,\mathrm{cm}$ *nalazi u zrakoplovu koji se uspinje pod kutom $\alpha = 30°$ prema horizontalnoj ravnini, s ubrzanjem od $a = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Odredite period tog matematičkog njihala.*

Rezultat: $T = 1.39\,\mathrm{s}$.

Problem 11.4.14 *Koliki je period fizičkog njihala u obliku homogenog štapa duljine $l = 2\,\mathrm{m}$ ako se njiše oko osi koja prolazi:*

a) jednim njegovim krajem,

b) kroz točku udaljenu od sredine štapa za $d = \frac{l}{6}$,

c) kada je period minimalan, a kada maksimalan?

Rezultat: **a)** $T = 2.3\,\mathrm{s}$**;** **b)** $T = 2.3\,\mathrm{s}$**;** **c)** period je najmanji za $d = 0.58\,\mathrm{m}$, a maksimalan za $d = 0\,\mathrm{m}$**;**

Problem 11.4.15 *Na nit dugu $l = 3\,\mathrm{m}$ obješena je kuglica čiji je polumjer $r = 3\,\mathrm{cm}$. Za koliko je veći period titranja tog fizičkog njihala od perioda matematičkog njihala kojim se ono može aproksimirati?*

Rezultat: $\Delta T = 6.95 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$.

Problem 11.4.16 *Dva homogena štapa duljine l spojeni su tako da je dobiven štap duljine $2l$. Ako je omjer masa štapova $2:1$, koliki je omjer perioda titranja kada je os na jednom, odnosno na drugom kraju dobivenog štapa?*

Rezultat: $\frac{T_1}{T_2} = 0.9661$.

Problem 11.4.17 *Materijalna točka izvodi istodobno dva međusobno okomita harmonijska titranja opisana jednadžbama:*

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= 1\,\mathrm{cm}\cos\frac{\pi}{\mathrm{s}}t \\ y\left(t\right) &= 2\,\mathrm{cm}\cos\frac{\pi}{2\,\mathrm{s}}t \end{aligned}$$

Odredite putanju materijalne točke.

Rezultat: $y^2\left(t\right) = \left(2\,\mathrm{cm}\right)x\left(t\right) + 2\,\mathrm{cm}^2$ uz $-1\,\mathrm{cm} \leq x \leq 1\,\mathrm{cm}$.

Dodatak A

O FIZICI I METODAMA FIZIKE

Fizika je jedna od prirodnih znanosti. Prirodne znanosti izučavaju svijet u kojem živimo. To je u stvari nastojanje čovjeka da shvati svoju okolinu u cilju ovladavanja njome. Fizika pretežno proučava takve pojave, koje se mogu mjeriti, dakle kvantitativno obraditi.

Istraživanja u znanosti se općenito temelje na dvijema općim metodama zaključivanja: **induktivna i deduktivna metoda**.

Induktivna metoda u zaključivanju polazi od pojedinačnoga k općem, a deduktivna od općega k pojedinačnom. U fizici se te dvije metode nazivaju eksperimentalna i teorijska. Eksperimentalnom metodom radimo kada namjerno stvorimo uvjete za nastanak neke prirodne pojave i tada mjerimo fizikalne veličine tijekom te pojave. Takvo namjerno izazivanje prirodne pojave i njeno ispitivanje nazivamo **pokus ili eksperiment**. Mjesto na kojem se obavljaju eksperimenti zove se **laboratorij**, za razliku od **opservatorija** gdje se obavlja promatranje prirodnih pojava koje se ne zbivaju pod utjecajem čovjeka. Pravi razvoj današnje fizike, a i drugih prirodnih znanosti, započeo je onda kada je Galileo Galilei (1564 - 1642) za svoja istraživanja o gibanju tijela upotrijebio eksperiment popraćen mjerenjima. Cijeli daljnji razvitak bio je logičan nastavak. Naravno, taj razvitak je bio uvjetovan društvenim razvojem.

Rezultati mjerenja dobiveni iz eksperimenta, unose se u tablice i predočuju grafički. Na osnovu tih tablica i grafičkih prikaza nastoji se pronaći zakonitost koja se može egzaktno iskazati pomoću matematičkih izraza (formula) koji povezuju mjerene veličine. Tako nađena zakonitost, koja izražava međusobnu ovisnost fizikalnih veličina, zove se **fizikalni zakon**.

Znanstvena istraživanja polaze od pažljivog prikupljanja činjenica dobivenih eksperimentom i brižljivim ispitivanjem dobivenih podataka. Mjerenja se ponavljaju i bilježe na osnovu čega se u nekim područjima podataka uočavaju pravilnosti i prema tome se zaključi o zakonitosti po kojoj se odvija ispitivana pojava. To je induktivna metoda, kojom se dolazi do određenih aksioma. Teorijskom metodom se nastoji povezati što veći broj tako dobivenih aksioma kako bi se našlo ono što je svim tim zakonima zajedničko (suštinu pojave) i stvoriti strogi zaključak, opći zakon iz kojeg proizlaze pojedinačni (deduktivna metoda). Snaga teorijske metode leži u tome, što ona može predskazati takav pojedinačni zakon koji nije još eksperimentalno pronađen. Ako eksperiment potvrdi predskazanu pojavu onda se povećava naše povjerenje u dotičnu teoriju, a ako je eksperiment ne potvrdi tj. da zakon nije u skladu s iskustvom, onda teoriju treba mijenjati. U fizici se uzima kao istinito ono što se može provjeriti eksperimentom, dok teorije koje nije moguće tako provjeriti ostaju kao spekulacije. Ako se predviđene pojave javljaju, zakoni se prihvaćaju i služe za nove izvode i istraživanja u području u kojem oni vrijede.

Većina zakona fizike vrijedi uz odgovarajuće uvjete tj. ima svoje područje valjanosti pa kod njihove primjene treba o tome dobro voditi računa. Tako zakoni koji su poznati za makrosvijet ne vrijede u mikrosvijetu, nego su oni specijalni slučaj zakona u mikrosvijetu. Ti zakoni makrosvijeta primjenjuju se na pojave kojima se bavi klasična fizika, na koje eksperimentator ne utječe zbog toga što obavlja mjerenje u tolikoj mjeri da bi ih primjetno poremetio. Ovdje se proučava uglavnom klasična fizika.

Prema predmetu izučavanja fizika se može podijeliti na pojedine grane. Tako npr. imamo slijedeće grane fizike: a) mehanika (statika, kinematika i dinamika) proučava ravnotežu i gibanje tijela kao i njihove uzroke, b) akustika proučava zvuk, c) znanost o toplini proučava toplinu,d) optika je znanost o svjetlosti i svjetlosnim pojavama, e) znanost o elektricitetu izučava elektricitet i magnetizam, f) molekulama fizika proučava molekule, g) atomska fizika atome, h) nuklearna fizika proučava jezgre atoma itd.

Osim navedenog današnja se moderna fizika upravo rascvjetala na razne uske specijalističke grane, u ostalom kao i mnoge druge znanstvene discipline. Fizikalne metode se primjenjuju i u drugim prirodnim znanostima pa su se osnovale posebne grane kao npr. fizikalna kemija, biofizika, astrofizika itd.

Fizički zakoni su temelji tehničkih znanstvenih područja. Fizikalne ideje koriste se u kemiji, biologiji, medicini i drugdje, a primjenjivat će se sigurno još i više, stoga je neophodno da i drugi (ne samo fizičari) shvate fizičke principe kako bi ih mogli bolje iskoristiti na svom području djelovanja.

Fizičke veličine, jedinice i dimenzije

Prirodne pojave opisujemo pomoću određenih parametara koje nazivamo **fizičke veličine** (ili fizikalne veličine). Fizičke veličine nisu objekti ni procesi, nego pomoću njih iskazujemo zakonitost prirodnih pojava. One su mjerljive veličine, tj. mogu se mjeriti, što znači uspoređivati jednu veličinu s istovrsnom drugom, odabranom kao standardnom, veličinom koja se naziva **mjerna jedinica**.

Mjerenjem opisujemo pojavu tako da je iskažemo brojevima. Rezultat svakog mjerenja je broj dobiven posebnom fizikalnom operacijom, koja je različita za svaku od fizičkih veličina i iziskuje za svaku različitu veličinu posebnu mjernu jedinicu. Taj broj zovemo brojčana vrijednost izmjerene veličine. Fizičke veličine se izražavaju umnoškom broja i jedinice. Samim brojem se iskazuju matematičke veličine.

Broj fizičkih veličina koje se uvode za opisivanje fizičkih pojava može biti jako veliki. Svaka fizikalna veličina mora biti jednoznačno definirana. Definirati fizičku veličinu znači odrediti ju preko poznatih veličina, tako da pronađemo vezu između njih kako bi broj veličina reducirali na što manji broj. Neke fizičke veličine su iskustveno jednoznačno jasne i bez posebnog definiranja (npr. duljina, vrijeme, ..), te njih možemo koristiti za definiranje ostalih fizičkih veličina. Takve veličine zovemo **temeljne ili osnovne (fizičke) veličine**. Ostale fizičke veličine se jednadžbama, tj. fizičkim zakonima, izvode iz osnovnih veličina.

Takve se veličine nazivaju **izvedene (fizičke) veličine**. Drugim riječima, sve izvedene veličine mogu se iskazati preko temeljnih fizičkih veličina. Koje ćemo fizičke veličine smatrati osnovnim i koliko je takvih veličina potrebno? Veličine koje ćemo smatrati osnovnim u danom području fizike, ovise o izboru načina opisivanja područja, što dovodi do toga da se o tome treba dogovoriti. Po tom dogovaranju treba voditi računa da osnovne veličine moraju biti nezavisne jedna o drugoj, a taj uvjet daje broj osnovnih fizičkih veličina za dano područje.

Pokazalo se da je za današnji razvoj fizike i tehnike dovoljno odabrati **sedam temeljnih veličina** i to prema područjima: 3 za mehaniku, 1 za elektricitet, l za toplinu, 1 za atomistiku i l za fotometriju. Izbor osnovnih veličina u svakom području fizike je u principu slobodan. Međutim, iskustvo, tradicija, svrsishodnost i dr. sužavaju taj izbor. O tome se dogovara na međunarodnoj razini. Osim što treba dogovoriti o osnovnim fizičkim veličinama, to isto treba učiniti za njihove pripadne mjerne jedinice koje se nazivaju **osnovne mjerne jedinice**. Osnovne mjerne jedinice se definiraju nezavisno jedna od druge, dok se izvedene mjerne jedinice, kojima se mjere izvedene fizičke veličine, izvode iz osnovnih pomoću dimenzijskih jednadžbi. Fizičke veličine imaju svoje dimenzije. Pojam dimenzije je osnovniji od pojma jedinice. Dimenzije osnovnih fizikalnih veličina nazivaju se osnovne dimenzije i preko njih se mogu izraziti dimenzije izvedenih fizičkih veličina.

Osnovne i izvedene fizičke veličine sa svojim jedinicama čine sustav mjernih jedinica. Taj sustav je u biti potpuno određen izborom osnovnih veličina i definiranjem njihovih jedinica. Raznim takvim odabiranjima dobili bi različite sustave, što bi dovelo do velikih problema u znanosti, tehnici, trgovini itd., a i zbog transformacija iz jednog sustava u drugi. Zbog toga je praktično da se o tome načini međunarodni dogovor. To je i učinjeno pa se tako dobio tzv. **Međunarodni sustav jedinica** ili skraćeno Sl-jedinice. Taj sustav je u Republici Hrvatskoj ozakonjen posebnim zakonom (Narodne novine br. 58 od 18. lipnja 1993.) prema kojemu smo dužni pridržavati se SI jedinica (dozvoljena odstupanja su tim zakonom također propisana).

Osnovne veličine i mjerne jedinice

Prve tri osnovne veličine i jedinice su vezane za mehaniku, zatim po jedna prema redoslijedu za elektrodinamiku, termodinamiku, atomsku fiziku i fotometriju. Svaka od navedenih mjernih jedinica je strogo definirana. Navedimo (zbog lakšeg razumijevanja) te definicije.

Osnovne veličine i mjerne jedinice sa oznakama prema SI su:

Osnovna fizikalna veličina	**Mjerna jedinica**	**Oznaka**
duljina	metar	m
masa	kilogram	kg
vrijeme	sekunda	s
jakost električne struje	amper	A
termodinamička temperatura	kelvin	K
množina tvari sustava	mol	mol
svjetlosna jakost	kandela	cd

1. **Metar** je osnovna jedinica za duljinu, a bio je definiran pohranjenom metarskom pramjerom. Jednak je dužini od 1650763.73 valnih duljina crvenog, vidljivog zračenja u vakuumu koje emitira izotop atoma kriptona $86(Kr)$ pri specifičnom prelasku elektrona iz jednog energetskog stanja u drugo. Definicija se dogovorno mijenja tako da bude čim preciznija koliko to omogućuju mjerna dostignuća. *Metar je duljina puta koju svjetlost prijeđe u praznini (vakuumu) za vrijeme od* $\frac{1}{299792458}s$.

2. **Kilogram** je osnovna jedinica za masu i jednak je masi međunarodne pramjere kilograma koja je pohranjen u međunarodnom uredu za utege i mjere u Sèvresu kraj Pariza.

3. **Sekunda** je osnovna jedinica za vrijeme i jednaka je vremenu trajanja 9192631770 perioda titranja zračenja koje odgovara specifičnom prijelazu (između dviju hiperfinih razina osnovnog slanja) atoma cezija $133(Cs^{133})$.

4. **Amper** je osnovna jedinica za jakost električne struje i jednak je struji koja djeluje na istu takvu struju silom od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru duljine, ako pri tome obje struje teku u zrakopraznom prostoru kroz dvije paralelne žice zanemarivo malena kružnog presjeka, jako dugačke (beskonačno) koje su međusobno udaljene jedan metar. (Ovdje upotrebljena jedinica za silu newton N koja je izvedena preko metra, kilograma i sekunde).

5. **Kelvin** je osnovna jedinica termodinamičke temperature definirana kao $273,16$ dio termodinamičke temperature trojne točke čiste vode. (Trojna točka vode znači točku u dijagramu promjene agregatnih stanja vode u kojoj mogu postojati sve tri faze vode tj. čvrsta, tekuća i plinovita).

6. **Mol** je osnovna jedinica za množinu (količinu) sustava.Mol je ona količina neke tvari koja sadrži $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ elementarnih jedinki sustava (atomi, molekule, ioni, elektroni i druge čestice).

7. **Kandela** (candela) je osnovna jedinica za svjetlosnu jakost i bila je definirana tako da je jednaka svjetlosnoj jakosti koju u okomitom pravcu zrači površina od $(600.000)^{-1}$ kvadratnog metra crnog tijela na temperaturi skrućivanja platine, pod tlakom 101325 Pa. Ova definicija je zasnovana na zakonu zračenja crnog tijela. Kandela je svjetlosna jakost kojom u određenom smjeru svjetli izvor jednobojne svjetlosti frekvencije 540 THz kada mu jakost zračenja u tom smjeru iznosi $683 - i$ dio vata po steradijanu.

Izvedene mjerne jedinice

Ovdje je jedan veliki dio izvedenih mjernih jedinica SI. Osim navedenih postoje i druge koje se iskazuju preko osnovnih SI jedinica. Međutim postoje određene jedinice koje su izvan SI, a dozvoljene su za korištenje općenito ili u užim područjima znanosti ili djelatnosti.

Tako je dozvoljeno koristiti:

Veličina	**Naziv**	**Vrijednost u SI**	**Područje**
duljina	1 morska milja	1 852 m	navigacija
površina	ar	100 m^2	
	hektar	10 000 m^2	
obujam	litra	dm^3	
masa	tona	1 000 kg	
masa	jed. atomske mase	$u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg	fizika, kemija

Izvedene jedinice su općenito definirane pomoću temeljnih jedinica koje se nalaze u rezolucijama Opće konferencije za mjere i utege. Možemo ih navesti prema njihovu nazivu, neke jedinice su dobile naziv po glasovitim znanstvenicima, i iskazati ih preko temeljnih jedinica. Navodimo dio onih koje se najčešće susreću:

Veličina	**Jedinica (opis)**
Površina	$\mathrm{m}^2 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$ - (četvorni metar)
Volumen	$\mathrm{m}^3 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$ - (kubni metar)
Kut	$\mathrm{rad} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}$ - (radijan, radian)
Ugao (prostorni kut)	$\mathrm{sr} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2}$ - (steradijan)
Gustoća	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Frekvencija	$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1}$ - (hertz, herc)
Brzina	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{ms}^{-1}$
Ubrzanje	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{ms}^{-2}$
Kutna brzina	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Kutno ubrzanje	$\frac{rad}{s^2} = rad \cdot s^{-2}$
Sila	$N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$ - (newton, njutn)
Tlak, naprezanje	$Pa = \frac{N}{m^2} = Nm^{-2}$ - (pascal, paskal)
Moment sile	$Nm = N \cdot m$ - (njutnmetar)
Energija, rad i toplina	$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ - (joule,džul)
Snaga, energetski tok	$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$ - (watt, vat)
Dinamička viskoznost	$\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}$
Električni naboj	$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$ - (coulomb, kulon)
El. napon i potenc.	$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3}$ - (volt)
Jakost el. polja	$\frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{kg \cdot m}{A \cdot s^3}$
Električni otpor	$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$ - (ohm, om)
Električna vodljivost	$S = \frac{1}{\Omega} = \frac{A^2 s^3}{kg \cdot m^2}$ - (siemens, simens)
Električni kapacitet	$F = \frac{C}{V} = \frac{A^2 s^4}{kg \cdot m^2}$ - (farad)
Induktivitet	$H = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 s^2}$ - (henry, henri)
Magnetna indukcija	$T = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{kg}{A \cdot s^2}$ - (tesla)
Magnetni tok	$Wb = Tm^2 = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$ - (weber, veber)
Osvjetljenje	$lx = \frac{lm}{m^2} = \frac{cd \cdot sr}{m^2}$ - (lux, luks)
Svjetlosni tok	$lm = cd \cdot sr$ - (lumen)
Aktivnost radioakt. izvora	$Bq = \frac{1}{s}$ - (becquerel, bekerel)
Apsorb. doza ion. zrač.	$Gy = \frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$ - (gray, grej)

Decimalne jedinice

Često se puta gore navedene jedinice u praksi pokažu nespretnima zbog toga što su premale ili prevelike. Zbog toga su uvedene decimalne jedinice.

Decimalne mjerne jedinice su decimalni dijelovi ili decimalni umnošci mjernih jedinica nastaju stavljanjem međunarodno prihvaćenih predmetaka (prefiksa) ispred oznake mjernih jedinica. Svaki predmetak ima svoju brojevnu vrijednost, koja je nezavisna o mjernoj jedinici, a nalazi se iza njega.

Nazivi predmetaka, njihove oznake i brojčane vrijednosti su:

Prefiks	**Oznaka**	**Vrijednost**	**Prefiks**	**Oznaka**	**Vrijednost**
yotta	Y	10^{24}	deci	d	10^{-1}
zepta	Z	10^{21}	centi	c	10^{-2}
eksa	E	10^{18}	mili	m	10^{-3}
peta	P	10^{15}	mikro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^{9}	piko	p	10^{-12}
mega	M	10^{6}	femto	f	10^{-15}
kilo	k	10^{3}	ato	a	10^{-18}
hekto	h	10^{2}	zepto	z	10^{-21}
deka	da	10	yocto	y	10^{-24}

Napomenimo da se prva dva i posljednja dva predmetka, uvedeni kasnije, rijeđe koriste. Kako se grade takve jedince pokažimo na nekoliko primjera:

1. $6.37\,\mathrm{kN} = 6.37 \cdot 10^3\,\mathrm{N} = 6.370\,\mathrm{N}$ - (čitamo kilonjutna)

2. $32.6\,\mathrm{MJ} = 32.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 32.600.000\,\mathrm{J}$ - (čitamo megadžula)

3. $1.2\,\mathrm{GW} = 1.2 \cdot 10^9\,\mathrm{W} = 1.200.000.000\,\mathrm{W}$ - (čitamo gigavata)

4. $0.82\,\mathrm{ms} = 0.82 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = 0.00082\,\mathrm{s}$ - (čitamo milisekundi)

5. $105\mu\,\mathrm{m} = 105 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 0.000105\,\mathrm{m}$ - (čitamo mikrometara)

Iz ovih nekoliko primjera može biti jasno kako se koriste međunarodno prihvaćeni prefiksi uz bilo koju SI-jedinicu. Osim što decimalne mjerne jedinice nastaju od SI-jedinica, mogu nastati i od slijedećih dopuštenih jedinica: litra, bar, vatsat, elektronvolt, voltamper (prividna snaga električne struje), var (jedinica za jalovu snagu električne struje) i teks (jedinica za duljinsku-linijsku masu $1\frac{kg}{m}$ - samo za tekstilna vlakna i konce). Decimalne mjerne jedinice za masu dobivaju se stavljanjem prefiksa ispred oznake za gram. Pri tvorbi decimalnih mjernih jedinica dopušteno je upotrijebiti samo jedan predmetak (npr. nije dozvoljeno kMW, a i nema takve potrebe jer bi navedeno odgovaralo GW). U nekim mjernim jedinicama pojavljuju se eksponenti kao m^2, s^{-2} itd., pri gradnji njihovih jedinica eksponent se stavlja samo uz oznaku mjerne jedinice, a odnosi se na cijelu decimalnu jedinicu. Tako $1\,\mathrm{mm}^2$ znači isto kao da pišemo $(1\,\mathrm{mm})^2$, tj. kvadrat stranice $1\,\mathrm{mm}$, što iznosi $10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, a ne znači $1\,\mathrm{m}\left(\mathrm{m}^2\right) = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ što je pogrešan način pisanja.

Primjeri

U slijedećim zadatcima odredite vrijednost x, tako da koristite potenciju s bazom 10 i da vrijede jednakosti:

1. $0.0185\,\mathrm{kW} = x\,\mathrm{W}$
2. $0.58\,\mathrm{W} = x\,\mathrm{kW}$
3. $385.2\,\mathrm{kW} = x\,\mathrm{MW}$
4. $0.153G\,\mathrm{N} = x\,\mathrm{MN}$
5. $1352\,\mathrm{MJ} = x\,\mathrm{GJ}$
6. $139.3h\,\mathrm{Pa} = x\,\mathrm{MPa}$
7. $83.6\,\mathrm{ms} = x\,\mathrm{s}$
8. $3.85 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{MW} = x\,\mathrm{mW}$
9. $2.83 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{mm} = x\,\mathrm{nm}$
10. $5852.5\,\mathrm{ns} = x\mu\,\mathrm{s}$
11. $0.0891 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} = x\,\mathrm{pm}$
12. $0.0098 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} = x\,\mathrm{pm}$
13. $0.073\,\mathrm{mm}^2 = x\,\mathrm{m}^2$
14. $35.86\,\mathrm{cm}^3 = x\,\mathrm{m}^3$
15. $46.89\,\mathrm{mm}^3 = x\,\mathrm{dm}^3$

Rezultati

1. $x = \frac{0.0185\,\mathrm{kW}}{1\,\mathrm{W}} = 18.\,5$
2. $x = \frac{0.58\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{kW}} = 0.000\,58 = 5.8 \cdot 10^{-4}$
3. $x = 385.2\,\mathrm{kW} = x\,\mathrm{MW}$
4. $x = 0.153G\,\mathrm{N} = x\,\mathrm{MN}$
5. $x = 1352\,\mathrm{MJ} = x\,\mathrm{GJ}$
6. $x = \frac{139.3h\,\mathrm{Pa}}{1\,\mathrm{MPa}} = 1.\,393 \cdot 10^{-2}$
7. $x = \frac{83.6\,\mathrm{ms}}{1\,\mathrm{s}} = 0.083\,6$
8. $x = \frac{3.85 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{MW}}{1\,\mathrm{mW}} = 3.\,85 \cdot 10^{-4}$
9. $x = \frac{2.83 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{mm}}{1\,\mathrm{nm}} = 28.\,3$
10. $x = \frac{5852.5\,\mathrm{ns}}{10^{-6}\,\mathrm{s}} = 5.\,852\,5$
11. $x = \frac{0.0891 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{pm}} = 891$
12. $x = \frac{0.0098 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{pm}} = 0.98$
13. $x = \frac{0.073\,\mathrm{mm}^2}{1\,\mathrm{m}^2} = 7.\,3 \cdot 10^{-8}$
14. $x = \frac{35.86\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{m}^3} = 3.\,586 \cdot 10^{-5}$
15. $x = \frac{46.89\,\mathrm{mm}^3}{1\,\mathrm{dm}^3} = 4.\,689 \cdot 10^{-5}$

Dodatak B

MATEMATIČKI DODATAK

B.1 Derivacija funkcija

Da bi došli do pojma derivacije, kao jedne matematičke operacije, najjednostavnije je poći od grafa funkcije $y = f(x)$ koji je prikazan na našoj slici. Za bilo koji x (nezavisna varijabla) funkcija y (zavisna varijabla) poprima svoju određenu vrijednost, koja se dobije uvrštavanjem x u zadanu funkciju $f(x)$. Povećamo li taj odabrani x (a može biti odabran bilo koji u području definicije) za neku vrijednost Δx (koji može biti i negativan) stigli smo u točku $x + \Delta x$. Uvrstimo li novodobivenu vrijednost $x + \Delta x$ u zadanu funkciju dobit ćemo $f(x + \Delta x)$, što odgovara ordinati funkcije u $x + \Delta x$. Sada se može vidjeti da se funkcija y promjenila za Δy, kada se x promjenio za Δx. Očito je iz slike:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{B.1.1}$$

Taj Δy se naziva prirast funkcije, a Δx prirast argumenta. Srednji prirast funkcije u intervalu od x do $x + \Delta x$, dobijemo ako prirast funkcije Δy podijelimo s prirastom argumenta Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{B.1.2}$$

Geometrijsko značenje tog srednjeg prirasta je prema slici, koeficijent smjera sekante (sječnice), tj. $k = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Zanima nas posebno, srednji prirast funkcije $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada se Δx smanjuje tako da postaje sve manji i manji te se približava samoj nuli. Tu proceduru možemo ovako kratko zapisati:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(čitamo: limes ili granična vrijednost, kada delta iks teži prema nuli od $\frac{\Delta y}{\Delta x}$). Limes latinski znači granica. Takva granična vrijednost srednjeg prirasla funkcije predstavlja koeficijent smjera tangente (zbog toga što Δx postaje nula sekanta prelazi u tangentu!) funkcije u određenoj točki x. Taj izraz je nazvan derivacija funkcije y, koja se označava:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{B.1.3}$$

Derivacija funkcije $y' = f'(x)$, računa se po ovom posljednjem izrazu. Uzmimo na primjer funkciju:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 3 \\ y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(x + \Delta x)^2 + 3\right] - \left(3x^2 + 3\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) \\ &= 6x + 3 \cdot 0 = 6x \end{aligned}$$

Na ovom primjeru vidi se način na koji se dođe, prema definiciji, do derivacije neke funkcije. Ovakva procedura nije praktična, pa se to ne izvodi svaki put, nego se ta procedura izvede općenito za svaku vrstu funkcija i na taj se način dobiju pravila za deriviranje. Navedimo neka koja će nam najčešće trebati:

Funkcija	**Izvod funkcije**
$y = c$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sec x$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$
$y = \csc x$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funkcija	**Izvod funkcije**
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{arccsc} x$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$y = \coth x$	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$y = Ar \sinh x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$y = Ar \cosh x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = Ar \tanh x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = Ar \coth x$	$y' = \frac{1}{x^2-1}$

Zatim pravila za deriviranje:

zbroja i razlike	$y(x) = u(x) \pm v(x)$
	$y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
produkta	$y(x) = u(x) \cdot v(x)$
	$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$
kvocijenta	$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
	$y'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u(x)^2}$
složene funkcije	$y(x) = f[g(x)]$
	$y'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Da bi se dobro uvježbala pravila deriviranja bilo bi potrebno uraditi niz primjera za svako pravilo i kombinacije, ovdje možemo dati samo nekoliko primjera, a ostale primjere vježbajte iz matematičke literature:

1. $\left(5x^4\right)' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20x^3$
2. $\frac{d}{dT}\left(2\pi\sqrt{\frac{T}{g}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{d}{dT}\sqrt{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{d}{dT}T^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2}T^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\pi}{\sqrt{gT}}$
3. $\frac{d}{dt}\cos(2t-7) = \frac{d}{dt}\cos(2t-7) = [-\sin(2t-7)](2t-7)' = -2\sin(2t-7)$
4. $\frac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right) = x + 2x\ln x$
5. $\frac{d}{dx}\left(7e^{5x}\cos 3x \sin 2x\right) = \frac{7}{2}e^{5x}\left(5(\cos 5x) - 5(\sin x) - (\cos x) + 5(\sin 5x)\right)$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+5x+2}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}(2x+5) + \frac{1}{(x-1)^2}\left(-5x - x^2 - 2\right)$

B.2 Integralni račun

Integralni račun, kao i derivacije, spada u područje infinitezimalnog računa (račun s beskonačno malim veličinama), koji je prvo bio uveden od Newtona za potrebe mehanike, da bi Leibnitz dao njegovu strogu matematičku formulaciju i uveo simboliku kojom se i danas služimo. Prije nego se upoznamo s operacijom integracije, neophodno je poznavanje operacije diferenciranja. Diferencijal zadane funkcije $y = f(x)$ dobije se deriviranjem te funkcije i množenjem s diferencijalom od argumenta:

$$dy = f'(x)\,dx \tag{B.2.1}$$

Diferencijal funkcije dy možemo zorno shvatili kao promjenu funkcije, kada se varijabla x promjeni za beskonačno malu vrijednost dx (znači dy i dx bi odgovarali veličinama Δy i Δx, uvedenu kod naslova derivacija, kada se Δx smanjuje tako da teži prema nuli). Integral, tj. operacija integracije, je suprotna operacija od diferenciranja do na aditivnu konstantu. To znači ako neku funkciju najprije diferenciramo pa dobiveno integriramo (ili obrnuti slijed operacija) ponovo dobivamo tu istu funkciju (različitu do na aditivnu konstantu). Operaciju integracije pišemo na slijedeći način:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + konst. \tag{B.2.2}$$

(čit. integral od ef od iks de iks jednako...). Funkcija $f(x)$ je podintegralna funkcija, dx je diferencijal varijable po kojoj se integrira (ako funkcija pod integralom ovisi o više parametara onda se po diferencijalu prepoznaje ona po kojoj se integrira, to mora uvijek pisati, jer izraz pod znakom integrala mora predstavljati diferencijal neke funkcije). Funkcija $F(x)$ se naziva primitivna funkcija, i ona je povezana s podintegralnom funkcijom $f(x)$ na slijedeći način:

$$F'(x) = f(x) \tag{B.2.3}$$

Znači ono što se dobije integracijom, kada se derivira mora dati onu funkciju koja piše pod integralom. S ovim u vezi je i gore napisana konstanta, jer kad se ona derivira dobije se nula pa je gore navedeni uvjet diferenciranjem zadovoljen, bez obzira kolika je ta konstanta zbog čega je niti ne možemo odrediti, tj. ona je neodređena. Zbog toga se u matematici takav integral naziva neodređeni integral. U fizici se ta neodređena konstanta odredi iz tzv. rubnih uvjeta, koji su unaprijed poznati iz fizičkog procesa, a to se svodi na to da se u dobiveni rezultat uvrsti vrijednost argumenta (najčešće nula ili beskonačno) za koji znamo rezultat i iz dobivene jednadžbe odredi se nepoznanta konstanta. Praktično se integrali funkcija određuju na osnovu pravila za integraciju koja se tabeliraju (vidi npr. logaritamske tablice posljednja stranica) u tzv. osnovne integrale pa je cijeli posao u tome da se željeni integral svede na neki od osnovnih. Međutim to nije uvijek moguće jednostavno učinili (kao što je to uvijek moguće kod deriviranja), ali mi se nećemo takvim slučajevima baviti.

Navedimo neka od tih pravila:

$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + c,$ gdje su a i c konstante,
Integral zbroja ili razlike jednak je zbroju ili razlici integrala
$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
Integral potencije, $\forall n \neq \{-1\}$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\int x^{-1} dx = \ln x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$
$\int \cot x dx = \frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos 2x) + c$
$\int \sinh x dx = \frac{1}{2} e^{-x} \left(e^{2x} + 1\right) + c$
$\int \cosh x dx = \frac{1}{2} e^{-x} \left(e^{2x} - 1\right) + c$
$\int \tanh x dx = \ln\left(e^{2x} + 1\right) - x + c$
$\int \coth x dx = \ln\left(e^{2x} - 1\right) - x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \ln x dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) + c$
$\int \log_a x dx = \frac{x}{\ln a} \ln x - \frac{x}{\ln a} = \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + c$

Tu smo naveli pravila koja su nama neophodna. Sada navedimo nekoliko primjera:

1. $\int 3x^5 dx = \frac{3}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{1}{2} x^6 + c$

2. $\int \left(7 + 2x - 4x^2\right) dx = \int 7dx + 2\int xdx 4 \int x^2 dx = 7x + x^2 - \frac{4}{3} x^3 + c$

3. $\int \frac{x+5}{x-1} dx = x + 6\ln(x-1)$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \sqrt{x^2+1} - \operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $\int 3\cos(5x)\,dx = 3\int \cos t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{3}{5} \int \cos t dt$
   $= \frac{3}{5} \sin t + c = \frac{3}{5} \sin 5x + c$

6. $\int 2\cos(2x)\,e^{3x+2} dx = \frac{6}{13}(\cos 2x)\,e^{3x+2} + \frac{4}{13}(\sin 2x)\,e^{3x+2}$
   $= \frac{2}{13} e^{3x+2}(3\cos 2x + 2\sin 2x)$

7. $\int \ln \frac{x-1}{x+2} dx = x \ln \frac{x-1}{x+2} - 2\ln(x+2) - \ln(x-1)$

ovakav integral ne možemo direktno po pravilu riješiti nego treba uvesti zamjenu $5x = t$, zatim to diferenciramo

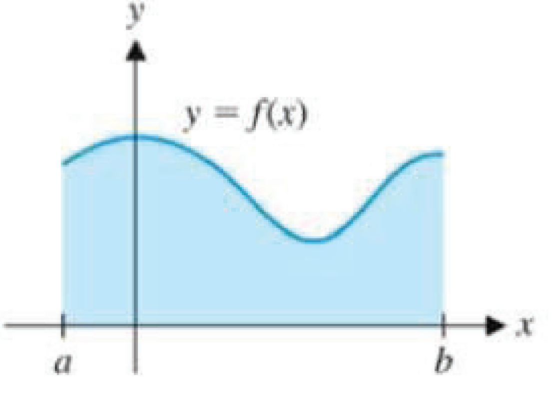
$$\begin{aligned}(5x)' \, dx &= t' dt \\ 5dx &= dt \\ dx &= \frac{1}{5} dt\end{aligned}$$

sa tim zamjenama se vratimo u zadani integral te u posljednjem koraku se vratimo na početnu varijablu. Ova tri primjera nisu dovoljna za vježbu, nama prostor ne dopušta više, a o tome detaljnije pogledajte u matematičkoj literaturi, međutim s takvim slučajevima ćemo se najčešće susretati, a kada nam bude trebao neki drugi dati ćemo ga posebno uz objašnjenje.

Osim neodređenog integrala postoji i određeni integral, koji se definira:

$$\int_b^a f(x)\, dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b) \tag{B.2.4}$$

Određeni integral ima granice. Integracija se provodi kao za neodređeni integral i na kraju se uvrste označene granice u primitivnu funkciju. Određeni integral predstavlja površinu ispod grafa funkcije, kako je to prikazano na slici:



Određeni integral

Dodatak C

TABLICE

Dodatak C

TABLICE

Tablice konstanti

Konstanta	Oznaka i vrijednost
brzina svjetlosti u vakuumu	$c = 2.99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
elementarni električni naboj	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
permitivnost vakuuma	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$
permeabilnost vakuuma	$\mu_0 = 1.2566370614 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
gravitacijska konstanta	$G\ (\gamma) = 6.67259 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Planckova konstanta	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmannova konstanta	$k = 1.3806568 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
plinska konstanta	$R = 8.314510\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6.0221367 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
normirani mol. volumen plina	$V_{mol} = 22.41410 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\,mol^{-1}}$
Stefan-Boltzmannova konstanta	$\sigma = 5.67051 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Rydbergova konstanta	$R_\infty = 1.0973731534 \cdot 10^7\,\mathrm{m^{-1}}$
masa mirovanja elektrona	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 5.485\,8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{u}$
masa mirovanja protona	$m_p = 1.6726231 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1.007276\,\mathrm{u}$
masa mirovanja neutrona	$m_n = 1.6749286 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1.008665\,\mathrm{u}$
Faradayeva konstanta	$F = 96\ 485.309\,\mathrm{C\,mol^{-1}}$
atomska masena konstanta	$\mathrm{u} = 1.6605402 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.49432\,\mathrm{MeV}$
masa Sunca	$1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
masa Zemlje	$5.9742 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
masa Mjeseca	$7.35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
srednji polumjer Sunca	$6.96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
srednji polumjer Zemlje	$6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
srednji polumjer Mjeseca	$1.74 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$
udaljenost Zemlje i Sunca*	$1.49 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
udaljenost Zemlje i Mjeseca*	$3.84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
period Mjeseca oko Zemlje	$27.32\,\mathrm{d} = 2.36 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$
period Zemlje oko Sunca	$365.25\,\mathrm{d}$
kutna brzina rotacije Zemlje	$7.272 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Osobine nekih čvrstih tvari

Tvar	Gustoća $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$	Youngov modul $\left(\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}\right)$	Specifični toplinski kapacitet $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\right)$	Koeficijent linearnog širenja $\left(10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}\right)$
aluminij	2 698	70	900	24
bakar	8 960	110	390	17
čelik	7 700	200	460	12
led	900	–	2 100	–
nikal	8 900	210	520	18
olovo	11 350	16	130	29
platina	21 500	170	130	9
pluto	250	–	2 050	–
srebro	10 500	85	230	19
staklo	2 500	50	800	9
volfram	19 200	360	150	4.5
zlato	19 300	78	130	15
željezo	7 900	180	460	12

Osobine nekih tekućina

Tvar	Gustoća $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$	Specifični toplinski kapacitet $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\right)$	Koeficijent volumnog širenja $\left(10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}\right)$
alkohol (etanol)	790	2 500	1.1
benzin	700	2 100	0.95
morska voda	1 030	3 930	0.24
voda	1 000	4 190	0.20
živa	13 600	140	0.18

Osobine nekih plinova

Tvar	Gustoća ($0\,^\circ C$ i 1.01 bar) $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$	Specifični toplinski kapacitet c_v $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\right)$
dušik - N_2	1.250	740
helij - He	0.179	3 150
kisik - O_2	1.430	650
ugljik-dioksid - CO_2	1.980	650
vodik - H_2	0.090	10 000
zrak	1.293	720

Koeficijent viskoznosti

Fluid	η (Pa s)	Fluid	η (Pa s)
voda ($20\,^\circ C$)	$1 \cdot 10^{-3}$	maslinovo ulje ($20\,^\circ C$)	$8.4 \cdot 10^{-2}$
voda ($70\,^\circ C$)	$4 \cdot 10^{-3}$	maslinovo ulje ($70\,^\circ C$)	$6 \cdot 10^{-3}$
voda ($100\,^\circ C$)	$2.8 \cdot 10^{-4}$	glicerin ($20\,^\circ C$)	0.86
etanol ($20\,^\circ C$)	$1.1 \cdot 10^{-4}$	zrak ($20\,^\circ C$)	$1.8 \cdot 10^{-5}$
etanol ($70\,^\circ C$)	$5.3 \cdot 10^{-4}$	zrak ($70\,^\circ C$)	$1.95 \cdot 10^{-5}$
živa ($20\,^\circ C$)	$1.55 \cdot 10^{-3}$	vodik ($20\,^\circ C$)	$0.9 \cdot 10^{-5}$
živa ($70\,^\circ C$)	$1.4 \cdot 10^{-3}$	motorno ulje ($100\,^\circ C$)	$9 \cdot 10^{-3}$

Bibliografija

[1] F. Ayres, Jr.; 1972., *Differential equations*, McGraw-Hill International Book Company, New York.

[2] M. Alonso; E. J. Finn, 1969., *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.

[3] C. Kittel; W. D. Knight; M. A. Ruderman; 2003., *Mehanika*, Golden Marketing, Tehnička knjiga, Zagreb.

[4] R. Wolfson; J. M. Pasachoff; 1990., *Physics: extended with modern physics*, HarperCollinsPublishers, USA.

[5] R. E. Eisberg; L. S. Lermer; 1982., *Physics: foundations and applications*, McGraw-Hill, Tokyo.

[6] B. V. Pavlović; T. A. Mihajlidi; 1986., *Praktikum računskih zadataka iz fizike*, Naučna knjiga, Beograd.

[7] A. A. Pinsky; 1980., *Problems in Physics*, Mir Publishers, Moskva.

[8] P. Kulišić; 1996., *Riješeni zadaci iz mehanike i topline*, Školska knjiga, Zagreb.

[9] V. Henč-Bartolić; i dr.; 1992., *Riješeni zadaci iz valova i optike*, Školska knjiga, Zagreb.

[10] M. R. Spiegel; 1974. *Vector analysis*, McGraw-Hill International Book Company, New York.

[11] E. Babić; R. Krsnik; M. Očko; 1978., *Zbirka riješenih zadataka iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb.

[12] Z. Primorac; 1990., *Zbirka riješenih zadataka iz mehanike*, Vazduhoplova vojna gimnazija "Maršal Tito", Mostar.

[13] Ahmad A. Kamal; 2010., 1000 solved problems in modern physics, Springer Science & Business Media, Taxas, USA.