Poglavlje 9

STATIKA FLUIDA

9.1 Osnovni pojmovi i definicije

Do sada smo razmatrali zakone gibanja i uvjete ravnoteže čvrstih tijela, za koje često pretpostavljamo da su savršeno kruta, naime da pod utjecajem i znatnih vanjskih sila ne mijenjaju ni svoj oblik ni svoj volumen. Međutim, tvari se pojavljuju još u tekućem i plinovitom stanju. Tekućine i plin mogu teći, oni se mogu prelijevati iz posude u posudu pa ih zajedničkim imenom zovemo *fluidi*.

Definicija 9.1.1 *Statika fluida proučava uvjete u kojima u fluidima nema mikroskopskih gibanja jednog djela fluida prema drugom, tj. uvjet ravnoteže.*

Naše razmatranje statike fluida odnosi se prije svega na hidrostatiku tj. idealiziranu i savršenu tekućinu. Svojstva tih tekućina jesu:

1. *neprekinutost*; volumen tekućine možemo razložiti na beskonačno mali elementarni volumen,

2. *homogenost*; svaki mali elementarni volumen ima ista svojstva,

3. *nestlačivost*; neovisnost volumena tekućine o silama koje je stlačuju, što je istovjetno s konstantnošću gustoće tekućine u svim elementarnim volumenima,

4. *savršenost*; za pomicanje jednog sloja tekućine prema drugom nije potreban rad, odnosno nema sile koja se protivi pomicanju jednog sloja tekućine prema drugom.

Kako su fluidi svojom unutarnjom strukturom različiti od čvrstih tijela ne možemo koristiti pojam sile kao dinamičke ili statičke veličine. Na primjer, svako djelovanje vanjskih sila na fluid dovodi do razmicanja molekula tj. proboja, što znači da je njeno djelovanje parcijalno i ne može se primijeniti na čitav sustav. Zbog toga za opisivanje djelovanja na fluid ili u fluidima, koristimo fizičku veličinu koja ima porijeklo u sili a zovemo je tlak.

Opća definicija tlaka može se dati i na slijedeći način.

Definicija 9.1.2 *Ako vanjska sila* (F) *djeluje normalno na površinu* (S) *i ako je djelovanje sile ravnomjerno raspoređeno po površini* (S) *tada tlak predstavlja omjer jakosti sile i površine na koju djeluje;*

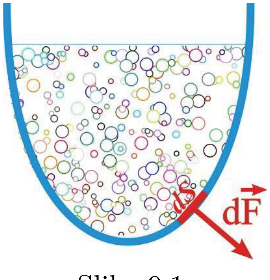
$$p \overset{def.}{=} \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{9.1.1}$$

Jedinicu za tlak nazivamo paskal $\left[\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s^2}}\right]$

Posljedica: U općem slučaju kada imamo elementarni tlak onda jednadžbu (9.1.1) pišemo u diferencijalnom obliku:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \tag{9.1.2}$$

Na osnovu ovih općih definicija možemo odrediti i tlak u fluidima. Zamislimo neku posudu u kojoj se nalazi fluid (vidi sliku 9.1.). U slučaju savršenog fluida nema sila kojom fluid djeluje paralelno s plohom elementarne površine (ds). To znači da je sila (dF) kojom fluid djeluje na (ds) nužno okomita na (ds). Omjer $\frac{dF}{ds}$, kada (ds) postaje beskonačno maleno, jest tlak fluida na površinu čvrstog tijela:



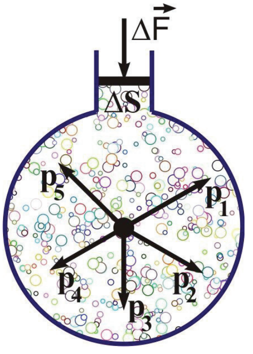
Slika 9.1.

$$p = \frac{dF}{ds} \tag{9.1.3}$$

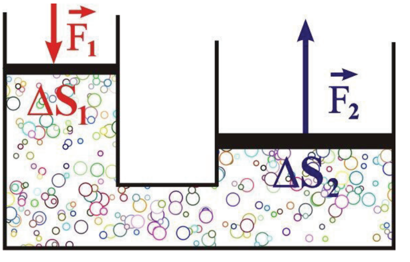
Poznato nam je kako se sila koja djeluje na čvrsto tijelo može pomicati duž pravca djelovanja (klizni vektor). Možemo postaviti pitanje na koji način se vanjska sila tj. tlak koji djeluje na fluid, ponaša unutar fluida?

Definicija 9.1.3 (Pascalov zakon) - *Tlak primijenjen ili izazvan vanjskom silom u zatvorenoj posudi prostire se u fluidima jednako na sve strane (slika 9.2.).*

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = const. \tag{9.1.4}$$



Slika 9.2.



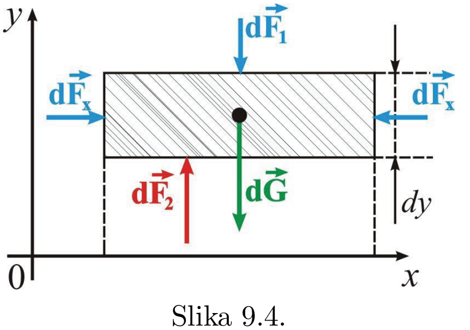
Slika 9.3.

Posljedica: Na osnovi Pascalovog zakona može se konstruirati hidraulični tijesak. Odnos sila i površina u hidrauličnom tijesku definiran je izrazom za tlak

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \tag{9.1.5}$$

Dakle, sa manjom silom F_1 na manjoj površini S_1 možemo savladati veću silu F_2 na većoj površini S_2 (slika 9.3.).

Ako se fluid nalazi u homogenom gravitacijskom polju, onda se pojavljuje unutarnji tlak fluida koji zovemo hidrostatski tlak ili općenito statički tlak (slika 9.4.).



Slika 9.4.

Da bismo našli relaciju za statički tlak promatrajmo element mirnog fluida. Taj promatrani proizvoljni sloj nalazi se u statičkoj ravnoteži. Sile koje djeluju na taj dio fluida moraju biti u ravnoteži:

$$d\overrightarrow{F}_x = -d\overrightarrow{F}_y \tag{9.1.6}$$

$$d\overrightarrow{F}_2 = d\overrightarrow{F}_1 + d\overrightarrow{G} \tag{9.1.7}$$

gdje je:

$$dF_2 = p \cdot S \tag{9.1.8}$$

$$dF_1 = (p + dp) \cdot S \tag{9.1.9}$$

$$dG = mg = \rho g S \cdot dy \tag{9.1.10}$$

iz (9.1.7) i (9.1.9) dobivamo

$$0 = dF_2 - dF_1 - dG \tag{9.1.11}$$

$$0 = p \cdot S - (p + dp)\, S - \rho g S \cdot dy / : S \tag{9.1.12}$$

$$dp = -\rho g \cdot dy \tag{9.1.13}$$

Jednadžba (9.1.13) predstavlja diferencijalnu jednadžbu statičkog tlaka fluida. Promatrajmo rješenje u konkretnom slučaju.

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{y_2}^{y_1} dy \tag{9.1.14}$$

gdje je:

$$p_1 = p,\ p_2 = p_a,\ h = y_2 - y_1 \tag{9.1.15}$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g\,(y_2 - y_1) \tag{9.1.16}$$

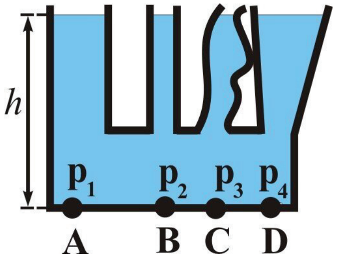
$$p_a - p = -\rho g h \tag{9.1.17}$$

$$p = \rho g h + p_a \tag{9.1.18}$$

Kako je p_a atmosferski tlak koji se pojavljuje kao konstanta onda jednadžba (9.1.18) može definirati statički tlak.

Definicija 9.1.4 *Statički tlak u fluidu u nekoj točki* (A) *na dubini* (h) *razmjeran je gustoći fluida* (ρ), *zemljinom ubrzanju* (g), *i dubini* (h)*:*

$$p = \rho g h \tag{9.1.19}$$



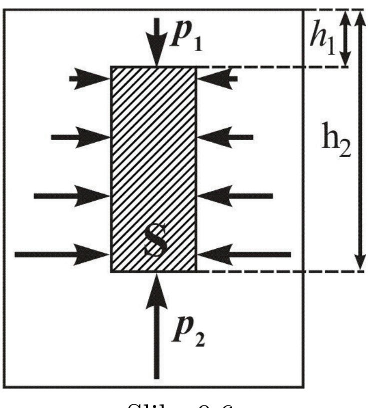
Slika 9.5.

Posljedica: Iz relacije (9.1.18) vidimo da statički tlak ovisi samo o dubini promatrane točke (h) kao promjenjive vrijednosti. To znači da tlak neće ovisiti o količini tekućine iznad promatrane točke. Ova pojava zove se hidrostatički paradoks ili zakon spojenih posuda.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \tag{9.1.20}$$

jer je $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$.
Ako se neko tijelo nalazi u fluidu, onda važi Arhimedov zakon.

Definicija 9.1.5 *Svako tijelo uronjeno u tekućinu gubi od svoje težine koliko je težina istisnute tekućine tim tijelom.*



Slika 9.6.

Ovaj kvalitativni zakon možemo objasniti pojavom sile uzgona (F_u) koja se uvijek javlja prilikom uranjanja nekog tijela u fluid.

Na osnovi relacije za hidrostatički tlak (9.1.19) vidimo da on raste sa dubinom. Ako neko tijelo stavimo u fluid, onda će na njegovu površinu djelovati određeni statički tlak od strane fluida.

Bočni tlakovi su jednaki jer za svaku dubinu odgovara jedan par suprotnih tlakova tako da je:

$$\sum p_{bo\check{c}} = 0 \tag{9.1.21}$$

No, gornji i donji tlak su uvijek različiti i to tako da je donji tlak uvijek veći od gornjeg tlaka.

$$p_2 - p_1 \neq 0 \text{ jer je } h_2 \neq h_1 \Longrightarrow p_2 - p_1 = \Delta p \tag{9.1.22}$$

Kao posljedica postojanja razlike tlaka javlja se uzgon:

$$F_u = \Delta p \cdot S \tag{9.1.23}$$

Na osnovu relacija (9.1.22) i (9.1.23) slijedi

$$\begin{aligned} F_u &= \Delta p \cdot S = p_2 S - p_1 S \\ &= \rho g h_2 S - \rho g h_1 S \\ &= \rho g \left(h_2 - h_1\right) S \\ F_u &= \rho_f \cdot g \cdot V_t \end{aligned} \tag{9.1.24}$$

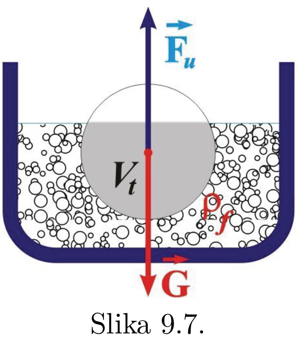
ili vektorski

$$\overrightarrow{F}_u = -\rho_f \cdot V_t \cdot \overrightarrow{g} \tag{9.1.25}$$

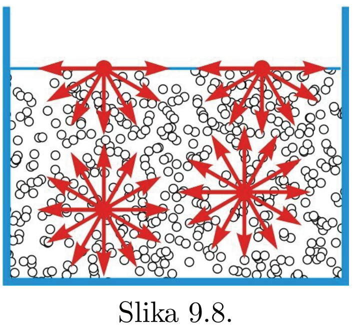
Definicija 9.1.6 *Prilikom uranjanja tijela u fluid uvijek se javlja sila uzgona ($\overrightarrow{F}_u$) koji leži na pravcu Zemljinog ubrzanja, ali uvijek ima suprotan smjer, tj. imamo pojavu smanjenja težine tijela. Vrijednost uzgona ovisi o gustoći fluida (ρ_f), volumena tijela uronjenog u fluid (V_t) i Zemljinog ubrzanja ($\overrightarrow{g}$) (slika 9.7.).*

Napomena: Treba obratiti pozornost da V_t predstavlja volumen tijela samo kada je cijelo tijelo uronjeno u fluid. Ako tijelo, na primjer pliva, onda je V_t' volumen tijela koji je uronjen u fluid pa onda taj dio tijela sudjeluje u uzgonu koji ima slijedeći oblik:

$$F_u = \rho_f \cdot V_t' \cdot g \tag{9.1.26}$$



Slika 9.7.


Slika 9.8.

Na površini realnog fluida pojavljuju se procesi koji ne podliježu zakonima statike fluida (na primjer, ne važi Arhimedov zakon). Razlog leži u tome što se na slobodnoj površini fluida javlja napetost. Unutar fluida sve su čestice u međusobnoj interakciji (međumolekularne sile) i ta je interakcija u ravnoteži. Na slobodnoj površini ne postoji red molekula iznad površine pa se javlja rezultanta sila između molekula koju nazivamo napetost (vidi sliku 9.8.). Različite realne tekućine imaju različite molekule, pa ni sila napetosti nije ista. Ovu razliku određujemo koeficijentom napetosti površine:

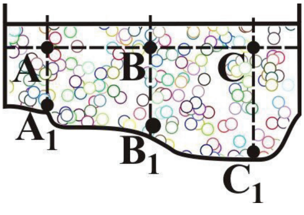
$$\sigma = \frac{dW}{ds} \tag{9.1.27}$$

Ona odgovara radu dW koji je potrebno utrošiti da bi se slobodna površina fluida povećala za ds. Dimenzija napetosti površine je $\frac{J}{m^2}$.

9.2 Problemski zadaci

Problem 9.2.1 *U posudi prikazanoj na slici 9.9. nalazi se fluid. U naznačenim točkama promatrajmo hidrostatski tlak. Koji su od slijedećih izraza točni:*

a) $p_A = p_{A_1}$, $p_B = p_{B_1}$ b) $p_A = p_B = p_C$
c) $p_{A_1} = p_{B_1} = p_{C_1}$ d) $p_A > p_B > p_C$



Slika 9.9.

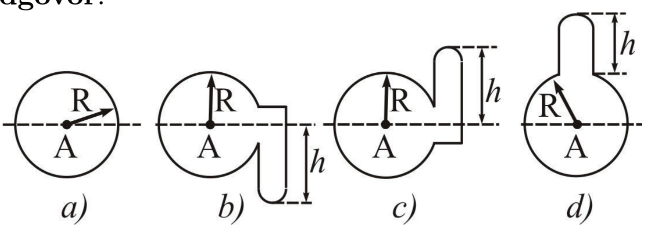
Odgovor:
Točan odgovor je pod b)

$$p_A = p_B = p_C$$

jer statički tlak u nekoj točki ($p = \rho g h$) ovisi o visini fluida iznad promatrane točke. Točke A, B i C se nalaze na istoj dubini u tekućini, tj. nalaze se na istom hidrostatskom tlaku.

Problem 9.2.2 *U kojem slučaju a), b), c) ili d) u točki A imamo maksimalni hidrostatski tlak (slika 9.10.)?*

Odgovor:



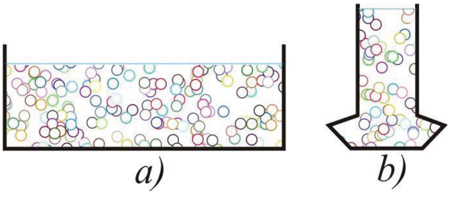
Slika 9.10.

U slučaju pod d), jer je u tom slučaju dubina na kojoj se nalazi točka A jednaka

$$d = h + R$$

dok je u drugim slučajevima manji iznos dubine.

Problem 9.2.3 *Dvije posude prikazane na slici 9.11. ispunjene su vodom. U širu posudu je nasuto* 10 l*, a u užu* 5 l *vode. U kojem slučaju će biti veći hidrostatski tlak na dnu posude?*



Slika 9.11.

Odgovor:

Kao što je prikazano na slici 9.11., u užoj posudi se nalazi viši stupac tekućine. Na osnovu izraza za hisdrostatski tlak

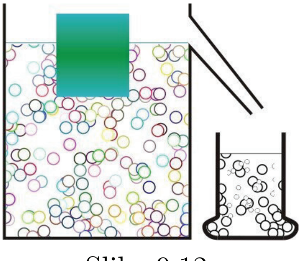
$$p = \rho g h$$

slijedi da je tlak na dnu posude veći u užoj posudi. Kao što se vidi u izrazu, hidrostatski tlak ne ovisi o količini tekućine u posudi, nego samo o visini stupca tekućine i njenoj gustoći.

Problem 9.2.4 *U posudu napunjenu vodom do prelivne cijevi postavi se komad drveta (slika 9.12.).*

a) Hoće li se promijeniti tlak na dnu posude?

b) Što će se dogoditi ako posuda nije napunjena do prelivne cijevi?



Slika 9.12.

Odgovor:

a) Ako je posuda napunjena vodom do prelivne cijevi i ubaci se komad drveta, neće doći do promjene tlaka na dnu posude zbog toga što neće doći do porasta visine stupca vode (jer će voda kroz prelivnu cijev isticati u manju posudu).

b) Ako posuda nije napunjena do prelivne cijevi i ubaci se komad drveta, tada će doći do porasta razine tekućine u posudi (razine maksimalno može porasti do prelivne cijevi), a time će doći i do promjene tlaka na dnu posude.

Problem 9.2.5 *Na slici 9.13. prikazana je vaga sa dvije cilindrične posude. Vaga je dovedena u položaj ravnoteže.*

a) Dodavanjem iste količine tekućine procijenite u kojoj posudi će biti viša razina tekućine?
b) Je li hidrostatski tlak na dnu jednak u obje posude?
c) Hoće li se poremetiti ravnoteža vage?

Slika 9.13.

Odgovor:

a) U lijevoj užoj posudi će biti viša razina vode jer se u posude ulijeva jednaka količina tekućine.

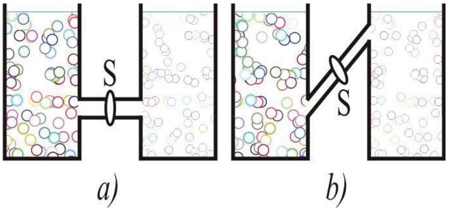
b) Hidrostatski tlak na dnu posude je veći u lijevoj, užoj posudi, jer je u njoj veća razina tekućine.

c) Do poremećaja ravnoteže vage neće doći, jer su količine tekućine, odnosno mase tekućina, jednake u obje posude pa je ravnoteža održana.

Problem 9.2.6 *Dvije spojene posude koje su prikazane na slici 9.14.a) napunjene su vodom do iste visine. Hoće li voda prelaziti iz jedne posude u drugu ako se otvori ventil S između njih? Ako se u jednoj posudi nalazi voda, a u drugoj benzin, do iste visine, hoće li tečnost protjecati iz jedne posude u drugu, ako se otvori ventil S? Obje pojave razmotrite i u slučaju kada cijev spaja posude kao na slici 9.14.b).*

Odgovor:

Voda neće prelaziti iz jedne posude u drugu, zbog toga što su obje posude napunjene do iste visine istom tekućinom (vodom), pa je hidrostatski tlak u obje posude isti.



Slika 9.14.

U slučaju da je u jednoj posudi voda, a u drugoj benzin, voda će prelaziti u posudu sa benzinom, zbog toga što je hidrostatski tlak veći na toj razini.

Naime, hidrostatski tlakovi iznose

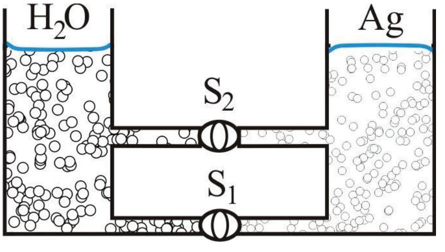
$$p_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h$$
$$p_{ben} = \rho_{ben} \cdot g \cdot h$$

kako je

$$\rho_{H_2O} > \rho_{ben} \Longrightarrow p_{H_2O} > p_{ben}$$

U slučaju da su obe posude napunjene vodom neće doći do prelaska tekućine, a u slučaju da imamo vodu i benzin doći će do prelaska iz istog razloga kao pod b).

Problem 9.2.7 *Na slici 9.15. su prikazane dvije posude napunjene do jednakih visina, jedna vodom, a druga živom. U početku su ventili* S_1 *i* S_2 *zatvoreni. Što će se dogoditi ako se otvori ventil* S_1*? Hoće li se nastalo stanje tekućine u posudi promijeniti kada se otvori i ventil* S_2*?*



Slika 9.15.

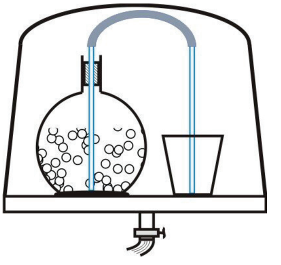
Odgovor:
Živa će iz desne posude prijeći u lijevu i potiskivati vodu naviše, sve dok se ne uspostavi ravnoteža hidrostatskih tlakova (vodenog i živinog stupca), računajući od donje razine.

Hoće, jer tlakovi na krajevima gornje cijevi, gdje se nalazi ventil S_2 nisu jednaki (treba uzeti u obzir da će živa zbog veće gustoće biti pri dnu posude).

Problem 9.2.8 *Na slici 9.16. je demonstriran uređaj koji se sastoji od staklenog zvona, pod kojim se nalazi balon u kojem ima određena količina obojene vode i prazna čaša. Balon je dobro začepljen gumenim čepom kroz koji je provučena savijena staklena cijev, čiji jedan kraj dodiruje dno balona, a drugi dno čaše. Ploča na kojoj je sastavljen ovaj uređaj spojena je sa zračnim usisavačem. Što će se desiti ako ispod zvona počnemo ispumpavati zrak? Objasni odgovor.*

Odgovor:

Kako se iz staklenog zvona izvlači zrak, doći će do podtlaka ispod zvona, a time i u otvorenoj čaši. U balonu neće doći do promjene tlaka (tj. ostat će početni tlak koji je viši nego li u čaši gdje se tlak smanjio), jer je balon dobro začepljen gumenim čepom. Zbog toga će doći do preticanja vode kroz savijenu staklenu cijev u čašu iz balona, i to istjecanje će trajati sve dok se tlakovi unutar balona i tlak pod staklenim zvonom ne izjednače, jer se istjecanjem vode iz balona tlak unutar začepljenog balona snižava, a ispod staklenog zvona lagano raste.



Slika 9.16.

Problem 9.2.9 *Ako se iz zračne puške pogodi kuhano jaje, na njemu će ostati otvor kroz koji je prošlo zrno. Međutim, ako se istim zrnom pogodi svježe jaje, ono će se raspasti. Objasni ovu pojavu.*

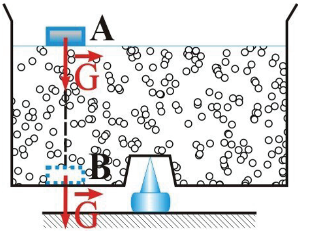
Odgovor:

Kuhano jaje je čvrsto pa se u njemu tlak prenosi samu u pravcu djelovanja sile, a u svježem jajetu (koje je tekuće) tlak zrna prenosi se u svim pravcima jednako.

Problem 9.2.10 *Posuda simetričnog oblika, prikazana na slici 9.17., napunjena je vodom i oslonjena na oštricu nepomične prizme. Na jednom kraju posude, u točki A postavi se tijelo mase m, pri čemu je gustoća tijela veća od gustoće vode. Hoće li tijelo dospjeti u točku B i objasnite oba položaja, odnosno, hoće li se poremetiti ravnoteža?*

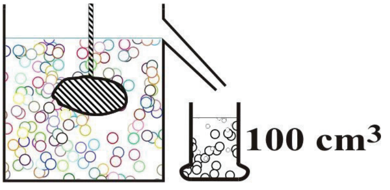
Odgovor:

Da bi se riješio ovaj problem, mora se uočiti da tijelo na površini vode (u točki A) vrši tlak, a prema Pascalovom zakonu taj tlak se ravnomjerno širi kroz vodu tako da neće doći do poremećaja ravnoteže. Budući da je gustoća tijela veća od gustoće vode, tijelo će tonuti i u točki B će doći u dodir sa dnom posude, što će izazvati poremećaj ravnoteže, jer se tlak (sila) kroz čvrsto tijelo prostire duž pravca tlaka (sile) pa je ravnoteža poremećena i doći će do prevrtanja posude s vodom.



Slika 9.17.

Problem 9.2.11 *Tijelo prikazano na slici 9.18. istisne određenu količinu vode koja se prelije u praznu menzuru. Na osnovu podataka sa slike odredite intezitet sile uzgona koja djeluje na tijelo. Hoće li se promijeniti sila uzgona, ako se u posudu doda izvjesna količina soli?*



Slika 9.18.

Odgovor:

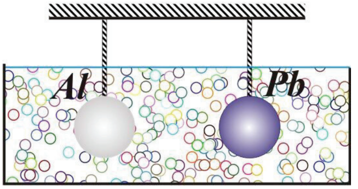
Sila uzgona koja djeluje na tijelo jednaka je

$$
\begin{aligned}
F_u &= \rho_{tek} \cdot g \cdot V \\
&= 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \\
&= 0.98\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Dodavanjem soli u vodu gustoća vode se povećava.

Kako sila uzgona ovisi direktno o gustoći tekućine u kojem je tijelo uronjeno, porast će i sila uzgona proporcionalno porastu gustoće.

Problem 9.2.12 *Dvije metalne kugle, jednakih volumena, obješene su o nit i uronjene u vodu. Jedna je od olova, a druga od aluminija. Na koju kuglu djeluje veća sila uzgona? Koja nit trpi jaču silu istezanja?*



Slika 9.19.

Odgovor:

Intezitet sila uzgona na obje kugle je jednak, jer kugle imaju isti volumen i uronjene su u tekućinu iste gustoće.

Nit na koju je obješena olovna kugla trpi jaču silu istezanja, jer olovna kugla ima veću masu od aluminijske (zbog veće gustoće $\rho_{Pb} > \rho_{Al}$), a time i veću težinu.

Problem 9.2.13 *Na polugu vage obješena su dva tijela od željeza jednakih masa (slika 9.20.). Kada se jedno tijelo uroni u posudu s vodom, a drugo u posudu sa alkoholom, ravnoteža se poremeti. Objasnite ovu pojavu.*

Odgovor:

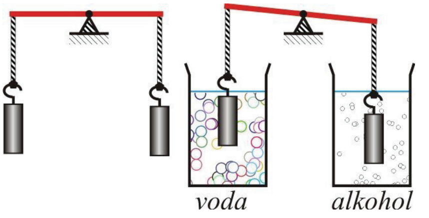
Do poremećaja ravnoteže dolazi zbog toga što se mijenja sila uzgona, jer vrijedi

$$F_u = \rho_{tek} \cdot g \cdot V$$

a kako je

$$\rho_{vode} > \rho_{alkohola}$$

to će i sile uzgona biti različite.



Slika 9.20.

Problem 9.2.14 *Poznati grčki filozof Arhimed dobio je zadatak od kralja Sirakuze da provjeri je li majstor za izradu krune upotrijebio cjelokupnu dobivenu količinu zlata i srebra, ili je utajio nešto zlata, zamijenivši ga nekim drugim metalom. Naime, masa izrađene krune i zbroj masa količina metala zlata i srebra bili su jednaki pa se to na prvi pogled nije moglo utvrditi. Kako je Arhimed riješio ovaj problem?*

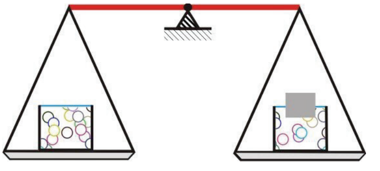
Odgovor:

Arhimed je pomoću vage ustanovio da je masa krune jednaka masi dobivenih količina metala, što nije bio dovoljno da utvrdi da je kruna izlivena upravo od dobivenih količina metala. Budući da je mjerenjem sile uzgona utvrdio da je zapremina krune jednaka zapremini dobivenih količina metala, on je bio siguran da je kruna napravljena upravo od tih metala, tj. da nisu dodavani drugi metali, niti je promijenjen odnos zlata i srebra.

Problem 9.2.15 *Dvije posude jednakih zapremina i masa, ispunjene su vodom do vrha (slika 9.21.). Ako se jedna posuda nalazi na jednom, a druga na desnom kraku vage, ona će biti u ravnoteži. Hoće li vaga ostati u ravnoteži ako se u jednu posudu stavi komad drveta?*

Odgovor:

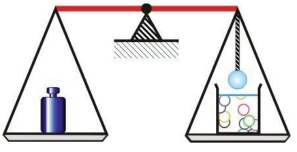
Hoće, jer će težina istisnute tekućine iz posude biti jednaka težini tijela. Zapravo, iz desne posude će isteći upravo onoliko tekućine koliki volumen tijelo bude uronjeno u vodu, a prema


Slika 9.21.

Arhimedovu zakonu, to je upravo onoliko koliko teži tijelo, pa je ukupna masa s obje strane vage ostala ista, a time i ravnoteža neće biti poremećena.

Problem 9.2.16 *Na slici 9.22. je prikazana vaga u ravnoteži. Hoće li se promijeniti ravnoteža vage, ako se konac o kojem visi tijelo A produži, tako da se ono uroni u vodu? Što će se dogoditi ako se konac toliko produži da tijelo padne na dno posude?*

Odgovor:

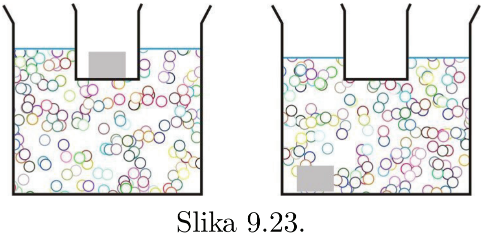


Slika 9.22.

Ako se konac produži da tijelo uroni u vodu, neće doći do poremećaja ravnoteže, jer će se djelovanje posude povećati onoliko koliko iznosi sila uzgona. Ako tijelo padne na dno posude, tada se dio težine prenosi preko dna posude, a dio preko dodatnog povećanja djelovanja posude kolika je sila uzgona.

Problem 9.2.17 *U metalnoj kutiji (slika 9.23.), koja pliva na površini vode u nekoj posudi, nalazi se komad željeza. Hoće li se razina vode u posudi promijeniti, ako se željezni komad izvadi iz kutije i postavi na dno posude?*

Odgovor:



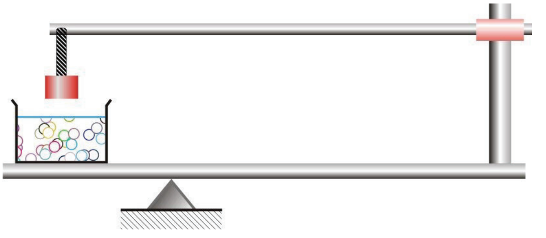
Slika 9.23.

Razina vode u posudi će se spustiti. Razlog tome leži u većoj gustoći željeznog komada. Kada je komad u posudi, on će istisnuti toliki volumen tekućine koliko teži tijelo, a taj volumen tekućine je puno veći od volumena tijela zbog manje gustoće tekućine. Kada je željezni komad u vodi, on će istisnuti samo volumen tekućine koliko iznosi i volumen željeza (razlika volumena, odnosno težine djeluje na dno posude gdje se nalazi komad željeza).

Problem 9.2.18 *Na slici 9.24. je prikazana vaga u ravnoteži. Hoće li se promijeniti ravnoteža vage, ako se konac o kojem visi tijelo produži i tijelo potopi u vodu (tako da tijelo ne dodirne dno posude)?*

Odgovor:

Doći će do promjene ravnoteže vage.



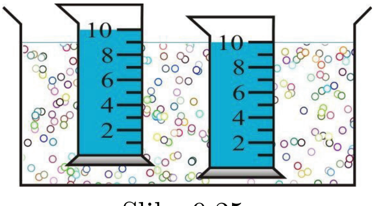
Slika 9.24.

Može se dokazati da ravnotežu vage narušava sila čiji je intezitet dvostruko veći od inteziteta sile uzgona koja djeluje na tijelo uronjeno u tekućinu (prilikom rješavanja problema potrebno je razmotriti ukupne sile koje djeluju na cijeli sustav).

Problem 9.2.19 *U dvije menzure je naliveno tekućine različitih gustoća. Što se može zaključiti o gustoćama tekućina, ako je prazna menzura uronjena do razine dna? Kolika je gustoća tekućine u lijevoj menzuri ako je u desnoj voda?*

Odgovor:

Iz zadane slike 9.25. može se zaključiti jedino o odnosu gustoća tekućina. Kao što vidimo odnos tekćina u lijevoj menzuri u odnosu na desnu jednak je



Slika 9.25.

$$\rho_L : \rho_D = 9 : 10$$

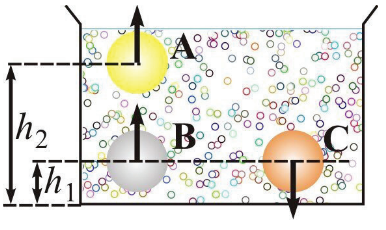
Budući da je u desnoj menzuri voda čija je gustoća

$$\rho_V = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

zaključujemo da je u lijevoj menzuri tekućina gustoće

$$\rho_t = 900 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Problem 9.2.20 *Tri tijela istih zapremina nalaze se u točkama A, B i C i to tako da tijela A i B isplivaju, a tijelo C tone. Kako se odnose sile potiska F_A, F_B i F_C? Objasnite odgovor.*



Slika 9.26.

Odgovor:

Budući da je sila uzgona po definiciji jednaka

$$F_u = \rho \cdot g \cdot V$$

to slijedi

$$F_{u_A} = F_{u_B} = F_{u_C}$$

gdje su ρ gusoća i V volumen tijela.

Kao što vidimo veličina uzgona ne ovisi o dubini na kojoj se nalazi tijelo (pri ovome se ne uzima u obzir promjena gustoće tekućine s dubinom). U slučaju da se uzima u obzir promjena gustoće tekućine s dubinom, onda će se promijeniti i sila uzgona proporcionalno promjeni gustoće tekućine.

9.3 Primjeri

Primjer 9.3.1 *Za koliko će se stisnuti voda ako je podvrgnemo tlaku u iznosu od* $p = 1000\,\mathrm{bar}$ *pri temperaturi* $T = 293\,\mathrm{K}$*. Modul elastičnosti pri ovim uvjetima iznosi* $E_v = 2.88 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$*?*

Rješenje:

Modul elastičnosti je zadan izrazom

$$E_v = -V\frac{dp}{dV} = -\frac{V}{\Delta V}\Delta p$$

odakle je relativna promjena volumena

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{E_v} = -\frac{10^8\,\mathrm{Pa}}{2.88 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}} = -0.03472$$

ili prikazano u postotcima početnog volumena

$$\frac{\Delta V}{V} = -3.472\%$$

tj. voda će se stisnuti za 3.47%.

Primjer 9.3.2 *Kako se mijenja gustoća kapljevine s promjenom tlaka uz konstantni modul elastičnosti?*

Rješenje:

Iz izraza za modul elastičnosti

$$E = -V\frac{dp}{dV} \Longrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{E}$$

i mase

$$\begin{aligned} m &= \rho V = konst./d \\ 0 &= V d\rho + \rho dV \Longrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dp}{E} / \int \\
\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{1}{E} \int_{p_0}^{p} dp \\
\ln \rho - \ln \rho_0 &= \frac{1}{E} (p - p_0) \\
\rho &= \rho_0 \cdot e^{\frac{p - p_0}{E}}
\end{aligned}
$$

Primjer 9.3.3 *Koliki je ukupni tlak u dubini mora od* $h = 1200\,\mathrm{m}$ *ako je pri površini normirani atmosferski tlak* $p_0 = 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$*? Koliko bi taj tlak iznosio na najvećoj izmjerenoj dubini u Marijanskoj brazdi koja iznosi* $11022\,\mathrm{m}$*?*

Rješenje:

Ukupni tlak na dubini h jednak je zbroju tlaka pri površini i hidrostatskog tlaka stupca vode

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + \rho g h = 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} + 1030 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1200\,\mathrm{m} \\
&= 1.22 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}
$$

a u Marijanskoj brazdi

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + \rho g h = 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} + 1030 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 11022\,\mathrm{m} \\
&= 1.11 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} \approx 1100\,\mathrm{atm}
\end{aligned}
$$

Primjer 9.3.4 *Koliko iznosi gustoća morske vode pri konstantnom modulu elastičnosti* $E = 2.7 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$*, na najvećoj do sada izmjerenoj dubini* $h = 11022\,\mathrm{m}$*, ako je gustoća morske vode pri površini* $p_{pov} = 1\,\mathrm{bar}$ *jednaka* $\rho_0 = 1020 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*?*

Rješenje:

Hidrostatsi tlak na dubini h iznosi

$$
p - p_0 = \rho g h = 1020 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 11022\,\mathrm{m} = 1.1 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}
$$

pa je gustoća

$$\rho = p_0 e^{\frac{p-p_0}{E}} = 1020\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot e^{\frac{1.104 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa}}{2.7 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}}} = 1062.6\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Primjer 9.3.5 *Koliki je modul elastičnosti E kapljevine koja je stisnuta u posudu volumena $V_0 = 0.8\,\mathrm{m}^3$ pod tlakom $p_0 = 1000\,\mathrm{bar}$ pa je zatim stisnemo u posudu volumena $V = 0.795\,\mathrm{m}^3$ pod tlakom $p = 1250\,\mathrm{bar}$?*

Rješenje:

Modul elastičnosti jednak je

$$\begin{aligned} E &= -V\frac{dp}{dV} = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} = -V \cdot \frac{p - p_0}{V - V_0} \\ &= -0.8\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{1.25 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} - 10^8\,\mathrm{Pa}}{0.8\,\mathrm{m}^3 - 0.798\,\mathrm{m}^3} = 10^{10}\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

Primjer 9.3.6 *Odredite gustoću fluida lakšeg od vode pomoću U - cijevi, ako su izmjereni slijedeći podatci: $h_f = 120\,\mathrm{mm}$ stupca fluida i $\Delta h = 36\,\mathrm{mm}$ stupca fluida. Pretpostavljamo da se fluid ne miješa sa vodom.*

Rješenje:

Kako moraju u točkama O biti jednaki tlakovi, to mora vrijediti

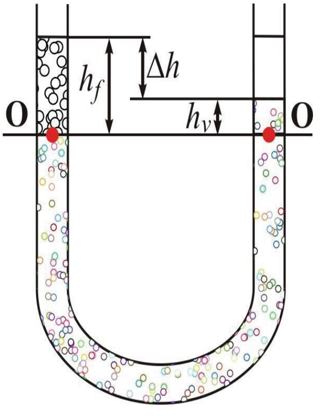
$$h_f \cdot \rho_f = h_v \cdot \rho_v$$

Iz slike 9.27. vidimo da vrijedi

$$h_v = h_f - \Delta h$$

pa je

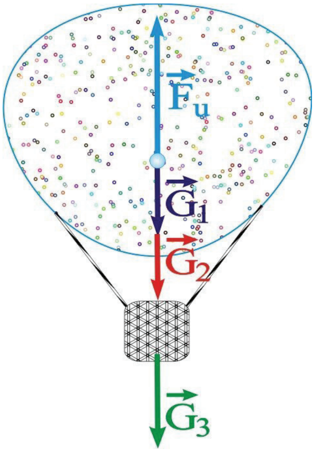
$$\begin{aligned} h_f \cdot \rho_f &= (h_f - \Delta h) \cdot \rho_v \\ \rho_f &= \left(1 - \frac{\Delta h}{h_f}\right) \cdot \rho_v \\ &= \left(1 - \frac{36\,\mathrm{mm}}{120\,\mathrm{mm}}\right) \cdot 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\ &= 700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned}$$



Slika 9.27.

Dakle, tekućina ima gustoću $700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Primjer 9.3.7 *Balon mase* $m = 60\,\mathrm{kg}$ *napunjen je sa* $300\,\mathrm{m}^3$ *helija. Koliki je maksimalni teret koji može ponijeti balon (slika 9.28.)? Koliki bi bio taj teret da smo balon ispunili vodikom? Pri normiranim uvjetima gustoća zraka iznosi* $\rho_Z = 1.29\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, *helija* $\rho_{He} = 0.179\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *i vodika* $\rho_{H_2} = 0.09\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.



Slika 9.28.

Rješenje:

Balon je maksimalno opterećen kad je ukupna sila koja djeluje na balon jednaka nuli, tj. kada je ukupna težina balona, tereta i plina unutar balona jednaka sili uzgona.

$$\begin{aligned} G &= F_u \\ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g &= \rho_z \cdot g \cdot V \end{aligned}$$

gdje su:

m_1- masa balona,
m_2- masa tereta i
$m_3 = \rho_{He} \cdot V-$ masa plina helija.
Jednadžba poprima oblik

$$m_1 + m_2 + \rho_{He} \cdot V = \rho_z \cdot V$$

odnosno maksimalni teret je jednak

$$\begin{aligned} m_2 &= (\rho_z - \rho_{He}) \cdot V - m_1 \\ &= \left(1.29\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 0.179\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) \cdot 300\,\mathrm{m}^3 - 60\,\mathrm{kg} \\ &= 273.3\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Ako balon ispunimo vodikom dobivamo, u prethodnoj jednadžbi samo zamijenimo vrijednosti gustoće plina helija sa vrijednušću gustoće plina vodika. Tada dobivamo

$$\begin{aligned} m_2 &= (\rho_z - \rho_H) \cdot V - m_1 \\ &= \left(1.29\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 0.09\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) \cdot 300\,\mathrm{m}^3 - 60\,\mathrm{kg} \\ &= 300\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Dakle, sustav napunjen vodikom bi mogao ponijeti 26.7 kg više nego kada je balon napunjen helijem.

Primjer 9.3.8 *Cilindrična željezna cijev, debljine stijenke* $\Delta r = 1\,\mathrm{mm}$*, zatvorena je na svojim krajevima diskovima zanemarivih masa. Ako je iz cijevi izvučen zrak, koliki treba biti vanjski polumjer cijevi* R *da bi ona lebdjela u zraku? Gustoća željeza je* $\rho_{Fe} = 7880\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*, a zraka* $\rho_z = 1.29\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*.*

Rješenje:

Da bi cijev lebdjela u zraku, sila uzgona zraka mora biti jednaka težini cijevi $F_u = G_c$. Težina cijevi jednaka je

$$G_c = m_c \cdot g = \rho_{Fe} \cdot V_c \cdot g = \rho_{Fe} \cdot \left[2R\Delta r - (\Delta r)^2\right] \cdot \pi h g$$

gdje je

$$V_c = \pi h \cdot \left[R^2 - (R - \Delta r)^2\right] = \pi h \cdot \left[2R\Delta r - (\Delta r)^2\right]$$

Sila uzgona jednaka je

$$F_u = \rho_z \cdot V \cdot g = \rho_z \cdot \pi h R^2 g$$

pa izjednačavajući uzgon i težinu

$$\rho_z \cdot \pi h R^2 g = \rho_{Fe} \cdot \left[2R\Delta r - (\Delta r)^2\right] \cdot \pi h g$$

dobivamo

$$R^2 - \frac{2\rho_{Fe} \cdot \Delta r}{\rho_z} R - \frac{\rho_{Fe} \cdot (\Delta r)^2}{\rho_z} = 0$$

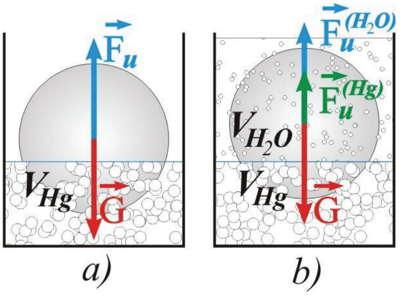
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$R_{1,2} = \frac{\Delta r \cdot \rho_{Fe}}{\rho_z} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\rho_z}{\rho_{Fe}}}\right] = 12.22\,\mathrm{m}$$

gdje rješenje s predznakom minus nije fizikalno.

Primjer 9.3.9 *Tijelo pliva na površini žive tako da mu je* 19.85% *volumena potopljeno u živu. Koliki je postotak volumena potopljen u živu ako se preko tijela prelije voda, tako da tijelo bude potpuno pod vodom?*

Rješenje:



Slika 9.29.

Ako tijelo pluta u živi, sila uzgona jednaka je težini tog tijela (slika 9.29.a). Po Arhimedovu zakonu vrijedi:

$$\begin{aligned} F_G &= U_{Hg} \\ mg &= \rho_t \cdot V_t \cdot g = \rho_{Hg} \cdot V_{Hg} \cdot g \\ &= \rho_{Hg} \cdot 0.1985 \cdot V_t \cdot g \end{aligned}$$

gdje su:

ρ_t, V_t - gustoća i volumen tijela,

ρ_{Hg}, V_{Hg} - gustoća žive i dio volumena tijela koji je potopljen u živu.

Iz prethodne jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} \rho_t &= 0.1985 \cdot \rho_{Hg} \\ &= 0.1985 \cdot 13600 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 2669.6 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned}$$

Ako tijelo prelijemo vodom (slika 9.29.b), javlja se dodatna sila uzgona vode na tijelo. Označimo volumen tijela u vodi V_1, a volumen tijela u živi V_2. Tada je

$$\begin{aligned} F_G &= U_{H_2O} + U_{Hg} \\ mg &= \rho_t \cdot V \cdot g = \rho_v \cdot V_1 \cdot g + \rho_{Hg} \cdot V_2 \cdot g \end{aligned}$$

gdje je ρ_v gustoća vode. Odavdje slijedi

$$\rho_t \cdot V = \rho_v \cdot V_1 + \rho_{Hg} \cdot V_2$$

no, ukupni volumen jednak je

$$V = V_1 + V_2$$

pa eliminacijom npr. V_1 slijedi

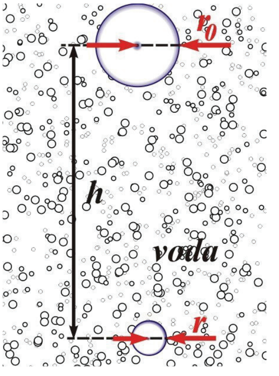
$$\begin{aligned} \rho_t \cdot V &= \rho_v \cdot (V - V_2) + \rho_{Hg} \cdot V_2 \\ V_2 &= \frac{\rho_t - \rho_v}{\rho_{Hg} - \rho_v} V = \frac{2669.6 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{13600 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \cdot V = 0.1325\ V \\ V_2 &= 13.25\%\ V \end{aligned}$$

dakle, 13.25% tijela će biti potopljeno u živu.

Primjer 9.3.10 *Pronađite omjer polumjera mjehura zraka na površini vode i na dubini od* $h = 100\,\mathrm{m}$*, pri čemu je tlak pri površini vode* $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$*. Zanemarite napetost površine vode te računajte uz konstantnu temperaturu.*

Rješenje:

Koristeći izraze za jednadžbu stanja idealnog plina uz konstantnu temperaturu i hidrostatski tlak slijedi



Slika 9.30.

$$\begin{aligned} p_0 \cdot V_0 &= p \cdot V \\ p &= p\,(h) = p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h \\ p_0 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r_0^3 &= (p_0 + \rho_v \cdot gh) \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \end{aligned}$$

gdje su p_0 tlak i $V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3$ volumen pri površini vode, a p tlak i $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ volumen mjehura zraka na traženoj dubini h.

Odavde je traženi odnos polumjera

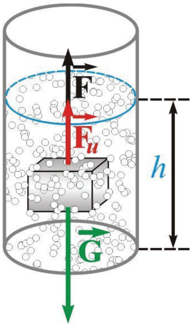
$$\begin{aligned} \frac{r_0^3}{r^3} &= \frac{p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho_v \cdot g \cdot h}{p_0}\right) \\ \frac{r_0}{r} &= \sqrt[3]{1 + \frac{\rho_v gh}{p_0}} = \sqrt[3]{1 + \frac{10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\,\mathrm{m}}{10^5\,\mathrm{Pa}}} = 2.21 \end{aligned}$$

Primjer 9.3.11 *U posudi oblika valjka čiji je polumjer dna* $r = 0.2\,\mathrm{m}$ *Uliveno je* $V_v = 5\,\mathrm{l}$ *vode. U posudu se spušta staklena kocka gustoće* $\rho_s = 2500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*. Koliku je silu potrebno upotrijebiti da se kocka podigne sa dna? Masa kocke je* $m = 0.5\,\mathrm{kg}$*?*

Rješenje:

Brid kocke iznosi

$$\begin{aligned} V_s &= a^3 = \frac{m}{\rho_s} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{m}{\rho_s}} = \sqrt[3]{\frac{0.5\,\mathrm{kg}}{2500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 0.058\,\mathrm{m} \end{aligned}$$



Slika 9.31.

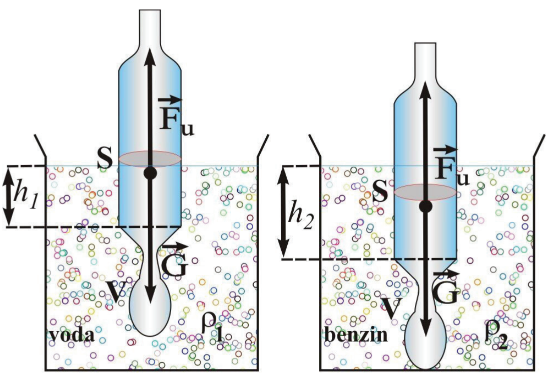
Kada se kocka uroni u vodu, razina je vode u posudi

$$\begin{aligned} V_v &= r^2\pi h - ha^2 \\ h &= \frac{V_v}{r^2\pi - a^2} \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{(0.2\,\mathrm{m})^2\,\pi - (0.058\,\mathrm{m})^2} = 0.041\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

pa je potrebna sila kako bi se kocka podigla sa dna posude jednaka

$$\begin{aligned} F &= mg - U \\ &= m \cdot g - \rho_v \cdot gha^2 \\ &= \left(m - \rho_v ha^2\right) \cdot g \\ &= \left[0.5\,\mathrm{kg} - 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.041\,\mathrm{m} \cdot (0.058\,\mathrm{m})^2\right] 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 3.53\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 9.3.12 *Aerometar je uronjen u vodu* $\rho_1 = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *do dubine* $h_1 = 0.1\,\mathrm{m}$*, a u benzinu gustoće* $\rho_2 = 700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *do dubine* $h_2 = 0.15\,\mathrm{m}$ *(slika 9.32.). Koliko će duboko uroniti aerometar u tekućinu gustoće* $\rho_3 = 2.5 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*?*



Slika 9.32.

Rješenje:

Pretpostavimo da je poprečni presjek cijevi aerometra S, a volumen kugle na dnu areometra V iz uvjeta ravnoteže slijedi da je težina areometra jednaka sili uzgona

$$G = F_u$$

Ovaj uvjet vrijedi bez obzira u kojoj tekućini se nalazi uronjen aerometar.

Označimo gustoću vode sa ρ_1, gustoću benzina sa ρ_2, a gustoću nepoznate tekućine sa ρ_3. Tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
m \cdot g &= (V + S \cdot h_1) \cdot \rho_1 \cdot g \Longrightarrow V = \frac{m}{\rho_1} - S \cdot h_1 \\
m \cdot g &= (V + S \cdot h_2) \cdot \rho_2 \cdot g \Longrightarrow V = \frac{m}{\rho_2} - S \cdot h_2 \\
m \cdot g &= (V + S \cdot h_3) \cdot \rho_3 \cdot g \Longrightarrow V = \frac{m}{\rho_3} - S \cdot h_3
\end{aligned}
$$

Ovo je sustav od tri jednadžbe s tri nepoznate V, S i h_3. Rješenje je sustava

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{\rho_1} - S \cdot h_1 &= \frac{m}{\rho_2} - S \cdot h_2 \Longrightarrow S = \frac{m}{h_1 - h_2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) \\
\frac{m}{\rho_2} - S \cdot h_2 &= \frac{m}{\rho_3} - S \cdot h_3 \Longrightarrow S = \frac{m}{h_2 - h_3} \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3}\right)
\end{aligned}
$$

odakle je

$$
\begin{aligned}
h_3 &= h_1 + (h_2 - h_1) \cdot \frac{\rho_2 \cdot (\rho_3 - \rho_1)}{\rho_3 \cdot (\rho_2 - \rho_1)} \\
&= 0.1\,\mathrm{m} + (0.15\,\mathrm{m} - 0.1\,\mathrm{m}) \cdot \frac{700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(2500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)}{2500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)} \\
&= 0.03\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Primjer 9.3.13 *Gustoća tekućine u posudi dubine $d = 3\,\mathrm{m}$ je linearna funkcija dubine. Gustoća na dnu iznosi $\rho_{dno} = 1.19\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, dok je gustoća pri površini ρ_{pov} za 5% manja od gustoće na dnu. Koliki je rad potreban da se predmet mase $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ i volumena $V = 50\,\mathrm{cm}^3$ podigne s dna na površinu vode? Trenje u tekućini zbog gibanja tijela zanemarite.*

Rješenje:

Budući da je gustoća linearna funkcija dubine, možemo pisati

$$\rho(x) = kx + l$$

Koristeći početne uvjete

$$\begin{aligned}\rho_{dno} &= \rho(d) = 1.19 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \\ \rho_{pov} &= \rho(0) = 1.1305 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\end{aligned}$$

dobiva se

$$\begin{aligned}\rho(0) &= l = \rho_{pov} \\ \rho(d) &= k \cdot d + l = k \cdot d + \rho_{pov} = \rho_{dno} \\ k &= \frac{\rho_{dno} - \rho_{pov}}{d}\end{aligned}$$

pa je funkcija gustoće tekućine

$$\rho(x) = \frac{\rho_{dno} - \rho_{pov}}{d} \cdot x + \rho_{pov}$$

Sila koja djeluje na tijelo jednaka je

$$\begin{aligned}F(x) &= m \cdot g - U(x) = m \cdot g - \rho(x) \cdot V \cdot g \\ &= m \cdot g - \left(\frac{\rho_{dno} - \rho_{pov}}{d} \cdot x + \rho_{pov}\right) \cdot V \cdot g\end{aligned}$$

a izvršeni rad je jednak

$$\begin{aligned}dW &= F(x)\,dx \Big/ \int_0^d dx \\ &= \int_0^d \left[m \cdot g - \left(\frac{\rho_{dno} - \rho_{pov}}{d} \cdot x + \rho_{pov}\right) \cdot V \cdot g\right] dx \\ &= \int_0^d \left[\left(m - \rho_{pov} \cdot V\right) \cdot g - \left(\frac{\rho_{dno} - \rho_{pov}}{d} \cdot V \cdot g\right) \cdot x\right] dx\end{aligned}$$

što nakon integracije daje

$$
\begin{aligned}
W &= \left[\left(m-\rho_{pov}\cdot V\right)\cdot g\cdot x-\frac{\rho_{dno}-\rho_{pov}}{d}\cdot V\cdot g\cdot\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^d \\
&= \left[\left(m-\rho_{pov}\cdot V\right)\cdot d-\frac{\rho_{dno}-\rho_{pov}}{d}\cdot V\cdot\frac{d^2}{2}\right]\cdot g \\
&= \left[\left(\rho_t\cdot V-\rho_{pov}\cdot V\right)-\frac{\rho_{dno}-\rho_{pov}}{2}\cdot V\right]\cdot gd \\
&= Vgd\cdot\left(\rho_t-\frac{\rho_{pov}+\rho_{dno}}{2}\right) \\
&= 50\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3\,\mathrm{m}\left(2000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}-\frac{1130.5\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}+1190\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{2}\right) \\
&= 1.24\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
\rho_t=\frac{m}{V}=\frac{0.1\,\mathrm{kg}}{50\,\mathrm{cm}^3}=2000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
$$

Primjer 9.3.14 *Pretpostavljajući da temperatura linearno ovisi o visini po zakonu $T\,(h)=T_0-kh$, gdje je $T_0=288\,\mathrm{K}$, a $k=6.5\frac{C}{\mathrm{km}}$, izračunajte barometarsku formulu za standardnu atmosferu (koristiti inženjersku plinsku konstantu za zrak $R'=\frac{R}{M}=287\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$). Izračunajte vrijednost tlaka na nadmorskoj visini od $h=8\,\mathrm{km}$, ako na razini mora tlak ima vrijednost $p_0=1010\,\mathrm{mbar}$.*

Rješenje:

Koristeći formulu za hidrostatski tlak u fluidu

$$
dp=-\rho\cdot g\cdot dh
$$

i jednadžbu stanja idealnog plina

$$
\begin{aligned}
p\cdot V &= n\cdot R\cdot T=\frac{m}{M}\cdot R\cdot T=\rho\cdot V\cdot\frac{R}{M}\cdot T \\
p &= \rho\cdot R'\cdot T\Longrightarrow\rho=\frac{p}{R'\cdot T}
\end{aligned}
$$

dobivamo

$$
\begin{aligned}
dp &= -\rho \cdot g \cdot dh = -\frac{g \cdot p}{R' \cdot T} \cdot dh = -\frac{g \cdot p}{R' \cdot (T_0 - k \cdot h)} \cdot dh \\
\frac{dp}{p} &= -\frac{g}{R'} \cdot \frac{dh}{T_0 - k \cdot h} \Big/ \int \\
\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} &= -\frac{g}{R'} \cdot \int_{0}^{h} \frac{dh}{T_0 - k \cdot h}
\end{aligned}
$$

smjenom u integralu na desnoj strani jednadžbe

$$u = T_0 - kh \Longrightarrow du = -kdh$$

odnosno $dh = -\frac{1}{k} du$ slijedi

$$\ln p \,|_{p_0}^{p} = -\frac{g}{R'} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot \ln \left(T_0 - k \cdot h\right) |_0^h$$

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{p}{p_0} &= \frac{g}{R'k} \cdot \ln \frac{T_0 - k \cdot h}{T_0} = \ln \left(\frac{T_0 - k \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R' \cdot k}} \\
\frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T_0 - k \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R' \cdot k}} \\
p\left(h\right) &= p_0 \cdot \left(1 - \frac{k \cdot h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R' \cdot k}}
\end{aligned}
$$

Koristeći vrijednost tlaka na razini mora za tlak na visini od $h = 8\,\mathrm{km}$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
p\left(8\,\mathrm{km}\right) &= 101\,\mathrm{kPa} \cdot \left(1 - \frac{6.5\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}} \cdot 8\,\mathrm{km}}{288\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{287\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 6.5 \cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}}} \\
&= 101\,\mathrm{kPa} \cdot 0.81944^{5.2586} = 35.444\,\mathrm{kPa} = 354.44\,\mathrm{mbar}
\end{aligned}
$$

Primjer 9.3.15 *Izračunajte temperaturu, tlak i gustoću zraka na visini od*
$h = 1\,\mathrm{km}$ *uz standardne uvjete (na* $h = 0$*, tlak je* $p_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$*, gustoća zraka* $\rho_0 = 1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*, temperatura* $T_0 = 288\,\mathrm{K}$*, te* $R' = 287\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$*) pretpostavivši:*

a) izotermnu atmosferu ($T = konst.$),
b) adijabatsku atmosferu $\left(\frac{p}{\rho^{1.4}} = konst.\right)$ i
c) standardnu atmosferu $\left(\frac{p}{\rho^{1.235}} = konst.\right)$.

Rješenje:

a) Za izotermnu atmosferu vrijedu (uz $T = konst.$) i oznake $p\,(0) = p_0$, te $\rho\,(0) = \rho_0$

$$\begin{aligned}\rho\,(h) &= \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p\,(h)\\ dp &= -\rho\,(h) \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot p\,(h) \cdot g \cdot dh\end{aligned}$$

Odavde separacijom varijabli i integracijom dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{p} &= -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh \Big/ \int \Longrightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_{o}^{h} dh\\ \ln p - \ln p_0 &= -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot (h-0) \Longrightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h\\ p\,(h) &= p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} h} = p_0 \cdot e^{-1.186 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot h}\end{aligned}$$

Koristeći uvjete zadatka za visinu $h = 10^3\,\mathrm{m}$ dobivamo

$$\begin{aligned}p\,(1\,\mathrm{km}) &= p_0 \cdot e^{-1.186 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 10^3\,\mathrm{m}} = 0.888\,16 \cdot p_0 = 89993\,\mathrm{Pa}\\ \rho\,(1\,\mathrm{km}) &= 0.888\,16 \cdot \rho_0 = 0.888\,16 \cdot 1.225 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1088 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ T\,(1\,\mathrm{km}) &= T_0 = 288\,\mathrm{K}\end{aligned}$$

b) Za adijabatski proces imamo $\frac{p(h)}{[\rho(h)]^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}$ odakle slijedi

$$\begin{aligned}[\rho\,(h)]^\kappa &= \rho_0^\kappa \cdot \frac{p\,(h)}{p_0} \Longrightarrow \rho\,(h) = \frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot [p\,(h)]^{\frac{1}{\kappa}}\\ dp &= -\rho\,(h) \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot [p\,(h)]^{\frac{1}{\kappa}} \cdot g \cdot dh\end{aligned}$$

odakle separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}} = \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot dh \Big/ \int \Longrightarrow \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot \int\limits_0^h dh = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot h &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \\
p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} &= \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot h \\
p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} &= p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot h \\
&= \frac{p_0}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot h
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
p &= p_0 \left[1 - \frac{(\kappa - 1) \cdot \rho_0 \cdot g \cdot h}{\kappa \cdot p_0} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\
&= p_0 \left(1 - 3.39 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot h \right)^{3.5} \\
p\,(1\,\mathrm{km}) &= p_0 \left(1 - 3.39 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 10^3\,\mathrm{m} \right)^{3.5} \\
&= 0.886\,29 \cdot p_0 = 89803\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}$$

iz jednadžbe adijabatskog procesa slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{p\,(h)}{[\rho\,(h)]^{\kappa}} &= \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} \\
\rho\,(h) &= \rho_0 \left[1 - \frac{(\kappa - 1)\,\rho_0 g h}{\kappa \cdot p_0} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \\
&= \rho_0 \left(1 - 3.39 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot h \right)^{2.5} \\
\rho\,(1\,\mathrm{km}) &= 0.917\,39 \cdot \rho_0 = 0.917\,39 \cdot 1.225 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1.1238 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
\end{aligned}$$

Promjenu temperature s visinom dobivamo iz plinske jednadžbe

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho_0 \cdot R' \cdot T_0 \text{ i } p = \rho \cdot R' \cdot T \\ T(h) &= T_0 \cdot \left(\frac{p(h)}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \end{aligned}$$

Koristeći promjenu temperature po tlaku,

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T_0}{p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot p^{-\frac{1}{\kappa}}$$

te promjenu tlaka po visini

$$\frac{dp}{dh} = -\rho \cdot g = -\frac{p \cdot g}{R'T}$$

dolazimo do ovisnosti temperature o visini

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dh} &= \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{dh} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T_0}{p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot p^{-\frac{1}{\kappa}} \right) \cdot \left(-\frac{p \cdot g}{R'T} \right) \\ &= -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{g}{R'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT &= -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{g}{R'} \cdot dh \Big/ \int \\ \int_{T_0}^{T} dT &= -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{g}{R'} \cdot \int_0^h dh \\ T(h) &= T_0 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{g}{R'} \cdot h \\ T(1\,\text{km}) &= 288\,\text{K} - 9.7659 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}} \cdot 10^3\,\text{m} = 278.23\,\text{K} \end{aligned}$$

c) Ako je $n = 1.235$ iz gornjih jednadžbi dobiva se

$$\begin{aligned}
p\,(h) &= p_0 \cdot \left[1 - \frac{(n-1)\cdot \rho_0 \cdot g \cdot h}{n \cdot p_0}\right]^{\frac{n}{n-1}} \\
&= p_0 \cdot \left(1 - 2.26 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot h\right)^{5.2553} \\
p\,(1\,\mathrm{km}) &= 0.886\,8 \cdot p_0 = 0.886\,8 \cdot 101325\,\mathrm{Pa} = 89855\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho\,(h) &= \rho_0 \left[1 - \frac{(n-1)\,\rho_0 g h}{n \cdot p_0}\right]^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \rho_0 \left(1 - 2.26 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot h\right)^{4.2553} \\
\rho\,(1\,\mathrm{km}) &= 0.886\,8 \cdot \rho_0 = 0.886\,8 \cdot 1.225 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1.0863 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dh} &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R'} \\
T\,(h) &= T_0 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R'} \cdot h \\
T\,(1\,\mathrm{km}) &= 288\,\mathrm{K} - 6.\,504\,0 \cdot 10^{-3} \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 281.5\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

Primjer 9.3.16 *Koliki je rad potreban da bi se kapljica žive polumjera $r = 2\,\mathrm{mm}$ razbila na kapljice trostruko manjeg polumjera ($\sigma_{Hg} = 0.48 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$)?*

Rješenje:

Polumjer novo nastale kapljice žive je $r' = \frac{r}{3}$, tada je

$$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot r'^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{27} = \frac{V}{27}$$

Dakle, od jedne kapljice žive polumjera r, dobiva se 27 kapljica žive trostruko manjeg polumjera r'. Pri tome se površina povećala za

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi \cdot r^2 \\
S' &= 4\pi \cdot r'^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{9} \cdot r^2 \\
\Delta S &= 27 \cdot S' - S = 27 \cdot \frac{4\pi}{9} \cdot r^2 - 4\pi \cdot r^2 = 8\pi \cdot r^2
\end{aligned}$$

pa je rad potreban za povećanje površine jednak

$$W = \sigma_{Hg} \cdot \Delta S = \sigma_{Hg} \cdot 8\pi \cdot r^2 = 0.48 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 8\pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2 = 4.83 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

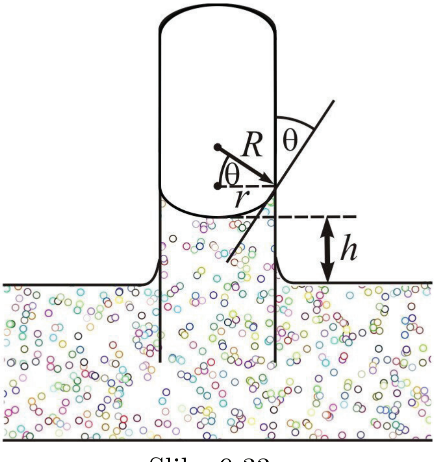
Primjer 9.3.17 *Kapilarnu cjevčicu zatvorenu na jednom kraju uranjamo okomito u posudu s vodom. Da bi se izjednačila razina vode u cjevčici i u posudi, treba uroniti u vodu* 1% *duljine cjevčice. Močenje je potpuno, tlak* $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$*, a koeficijent površinske napetosti vode* $\sigma = 0.073 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$*. Koliki je unutrašnji polumjer cjevčice?*

Rješenje:

Kapilara duljine l i poprečnog presjeka S ima volumen

$$V = S \cdot l$$

i prije njenog uranjanja u vodu tlak od $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Uranjanjem cjevčice u vodu događa se karakteristična pojava kapilarnosti tekućine.



Slika 9.33.

Dio volumena cjevčice koji se nalazi pod tlakom p' i koji nije ispunjen vodom označimo sa

$$V' = S \cdot (l - h)$$

Pretpostavljajući da kapilarna pojava uopće ne mijenja temperaturu sustava, Boyle-Mariottov zakon daje

$$\begin{aligned} p \cdot V &= p' \cdot V' \\ p \cdot S \cdot l &= p' \cdot S \cdot (l - h) \\ p \cdot l &= p' \cdot (l - h) \end{aligned}$$

Tlak p' složen je od početnog tlaka p i tlaka kapilarnog stupca vode $\Delta p = \frac{2\sigma \cos\alpha}{r}$,

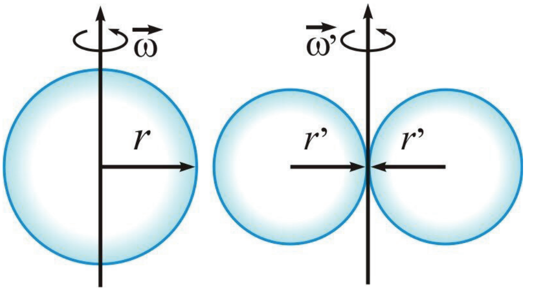
$$p' = p + \Delta p = p + \frac{2\sigma \cdot \cos\alpha}{r}$$

gdje je r traženi polumjer cjevčice, $\frac{r}{\cos\alpha}$ polumjer zakrivljenosti meniska i α kut močenja. Kako je močenje potpuno, vrijedi $\cos\alpha = 1$ pa prethodne jednadžbe daju

$$\begin{aligned}
p \cdot l &= \left(p + \frac{2\sigma \cdot \cos\alpha}{r}\right) \cdot (l - h) \\
p \cdot h &= \frac{2\sigma \cdot \cos\alpha}{r} \cdot (l - h) \\
r &= \frac{2\sigma \cdot \cos\alpha}{p} \cdot \left(\frac{l}{h} - 1\right) \\
&= \frac{2 \cdot 0.073 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 1}{10^5\,\mathrm{Pa}} \cdot \left(\frac{l}{0.01 \cdot l} - 1\right) = 0.1445\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

Primjer 9.3.18 *Kojom brzinom može rotirati kapljica vode mase* $m = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}$*, a da se ne razdvoji. Površinska napetost vode iznosi* $\sigma = 0.073 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$*. Treba uzeti u obzir da se prilikom deformacije kapljice povećava moment inercije kapljice.*

Rješenje:



Slika 9.34.

Kapljica vode sfernog oblika i polumjera r rotira kutnom brzinom ω deformira se i u graničnom slučaju se može predstaviti kao dvije sferne kapljice polumjera r' koje rotiraju oko osi, koja je tangenta oko obje kapljice. Time se povećava ukupna površina, a smanjuje kinetička energija sustava. Zbog pojave površinske napetosti vode povećava se površinska energija. Mora vrijediti zakon očuvanja mehaničke energije i količine gibanja, zbog toga što je sustav izoliran (nismo uzimali nikakve vanjske utjecaje na proces). Dok kapljica ima sferni oblik, moment tromosti i kinetička energija sustava je:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\
E_k &= \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega^2}{5}
\end{aligned}$$

Kada se kapljica deformira dvije kapljice polumjera r', površina se povećava od $S = 4\pi \cdot r^2$ do $S' = 2 \cdot 4\pi \cdot r'^2$ što zbog $r' = \frac{r}{\sqrt[3]{2}}$ iznosi

$$\Delta S = 2 \cdot 4\pi \cdot r'^2 - 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot r^2 \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$$

Dvije kapljice se vrte kutnom brzinom ω' oko osi koja je tangenta za obje. Pomoću Steinerova poučka za moment tromosti kapljica dobivamo

$$\begin{aligned} I' &= 2 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot m' \cdot r'^2 + m' \cdot r'^2\right) = \frac{14}{5} \cdot m' \cdot r'^2 \\ &= \frac{14}{5} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = \frac{7}{2^{\frac{5}{3}}} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 = \frac{7}{2^{\frac{5}{3}}} \cdot I = 2.2 \cdot I \end{aligned}$$

Prema zakonu momenta očuvanja količine gibanja slijedi

$$I \cdot \omega = I' \cdot \omega' \Longrightarrow \omega' = \frac{I \cdot \omega}{I'} = \frac{I \cdot \omega}{\frac{7}{2^{\frac{5}{3}}} \cdot I} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7} \cdot \omega$$

Kinetička energija dviju kapljica iznosi

$$E_k' = \frac{1}{2} \cdot I' \cdot \omega'^2 = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7} \cdot E_k$$

Rad za povećanje površine jednak je promjeni kinetičke energije

$$\begin{aligned} \Delta S \cdot \sigma &= 4\pi \cdot r^2 \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \cdot \sigma = \left(1 - \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7}\right) \cdot E_k \\ &= \left(1 - \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7}\right) \cdot \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega^2}{5} \\ \omega &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot r^2 \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \cdot \sigma}{\left(1 - \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7}\right) \cdot \frac{m \cdot r^2}{5}}} = \sqrt{\frac{20\pi \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \cdot \sigma}{\left(1 - \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7}\right) \cdot m}} = 457\,\mathrm{s}^{-1} \\ \omega' &= \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7} \cdot \omega = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{7} \cdot 457\,\mathrm{s}^{-1} = 207.27\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned}$$

9.4 Zadatci

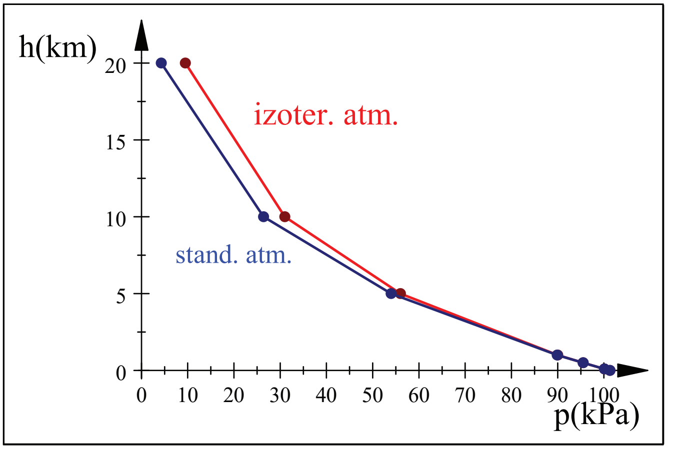
Problem 9.4.1 *Dug, zatvoreni, okomito postavljen cilindar stalnog volumena potpuno je ispunjen nestlačivom tekućinom gustoće* $\rho = 800\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*, osim veoma malog mjehurića idealnog plina netopljivog u tekućini koji se zadržava na udaljenosti* $h_1 = 10\,\mathrm{m}$ *ispod vrha tekućine. Tlak na vrhu tekućine iznosi* $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$*. Mjehurić se oslobodi i dođe na površinu tekućine. Koliki je sada tlak na površini tekućine i na dubini* h_1*?*

Rezultat:
$p_{pov} = 1.78 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $p_h = 2.57\,\mathrm{Pa}$.

Problem 9.4.2 *Izračunajte vrijednosti tlaka na nadmorskoj visini* $h = 100\,\mathrm{m}$*,* $500\,\mathrm{m}$*,* $1\,\mathrm{km}$*,* $5\,\mathrm{km}$*,* $10\,\mathrm{km}$ *i* $20\,\mathrm{km}$ *za izotermnu atmosferu, te za standardnu atmosferu* $\left(\frac{\Delta T}{\Delta h} = -6.5\frac{^\circ C}{\mathrm{km}}\right)$*. Nacrtajte funkciju* $h(p)$ *za standardne uvjete (*$p_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$*,* $\rho_0 = 1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*,* $T_0 = 288\,\mathrm{K}$*).*

Rezultat:

Atmosfera	h (km)	0	0.1	0.5	1	5	10	20
izotermna	p (kPa)	101.3	100.1	95.5	90	56	31	9.5
standardna	p (kPa)	101.3	100.1	95.5	89.9	54	26.4	4.3



Slika 9.35.

Problem 9.4.3 *Ako je tlak na nadmorskoj visini* $h = 100\,\mathrm{m}$ *jednak* $p_{100} = 101\,\mathrm{kPa}$*, koliki je tlak na vrhu planine visoke* $h' = 2110\,\mathrm{m}$*? Pretpostavimo da je temperatura svuda jednaka i da iznosi* $T = 273\,\mathrm{K}$*.*

Rezultat:
$p_{2110} = 78\ 468\,\mathrm{Pa}$

Problem 9.4.4 *U standardnoj atmosferi (ICAOSA - International Civil Aviation Organization Standard Atmosphere) tlak i gustoća zraka povezani su relacijom* $\frac{p}{\rho^n}$, *gdje je* $n = 1.235$. *Pokažite da to odgovara temperaturnom gradijentu* $\frac{dT}{dh} = -6.5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$. *Koliki je temperaturni gradijent za adijabatsku atmosferu* ($n = 1.4$)*?*

Rezultat:
Za $n = 1.235$, $\frac{dT}{dh} = -\frac{g}{R'}\frac{n-1}{n} = -6.5\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}$,
za $n = 1.4$, $\frac{dT}{dh} = -\frac{g}{R'}\frac{n-1}{n} = -9.766\,1 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} = -9.7661\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}$.

Problem 9.4.5 *U moru pliva santa leda. Volumen sante leda iznad mora iznosi* $V_i = 2210\,\mathrm{m}^3$. *Koliki je ukupni volumen sante leda ako je gustoća morske vode* $\rho_v = 1030\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, *a gustoća leda* $\rho_l = 900\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*?*

Rezultat:
$V = 17510\,\mathrm{m}^3$.

Problem 9.4.6 *U U-cijevi čiji krakovi imaju različite polumjere ulivena je voda. Kolika je razlika razina vode u krakovima U-cijevi ako su njihovi polumjeri* $r_1 = 4\,\mathrm{mm}$ *i* $r_2 = 0.6\,\mathrm{mm}$*? Pretpostavima da voda potpuno moči stijenku cijevi.*

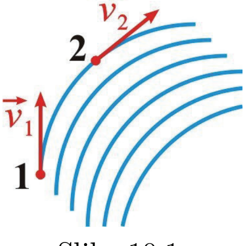
Rezultat:
$\Delta h = 2.1\,\mathrm{cm}$.

Poglavlje 10

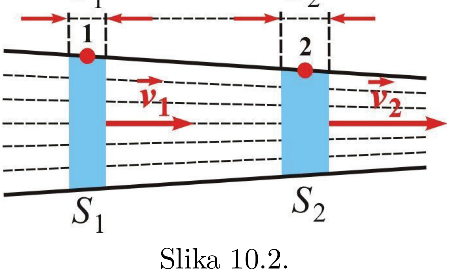
DINAMIKA FLUIDA

10.1 Osnovni pojmovi i definicije

Mi ćemo uglavnom promatrati permanentno (stacionarno) strujanje fluida. Za prikazivanje gibanja fluida koristimo model koji se zove strujni pravci (strujnice), a to su linije po kojima se sukcesivno kreću čestice fluida. Osnovna karakteristika permanentnog strujanja fluida jest vremenska nepromjenjivost brzine u pojedinoj točki strujnog pravca. Strujanje u nekim točkama (slika 10.1.) na primjer (1) i (2) ima za sve čestice koje dolaze u navedene točke uvijek istu vrijednost brzine v_1 i v_2. Skup strujnica, tj. ograničeni fluid čini strujnu cijev.



Slika 10.1.



Slika 10.2.

Na osnovu prethodno navedenog svojstva stacionarnog gibanja fluida slijedi da će na nekom poprečnom presjeku S_1 i S_2 sve čestice fluida imati iste brzine v_1 i v_2. Kako su idealni fluidi nestlačljivi slijedi da je u nekom vremenu protjecanja (t) kroz poprečne presjeke S_1 i S_2

proteći ista količina odnosno isti volumen fluida $V_1 = V_2$ (slika 10.2.):

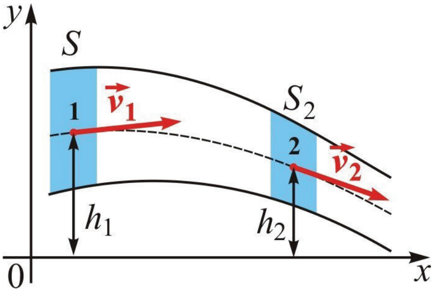
$$V_1 = S_1 \cdot x_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t \quad (10.1.1)$$
$$V_2 = S_2 \cdot x_2 = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \quad (10.1.2)$$

gdje je fluid prešao duljinu u strujnoj cijevi $x_1 = v_1 \cdot \Delta t$ i $x_2 = v_2 \cdot \Delta t$. Dakle, vrijedi $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$. Za stacionarno strujanje nestlačljivih fluida zakon o očuvanju mase i energije izražava se u obliku jednadžbe kontinuiteta:

$$q = S \cdot v = const. \quad (10.1.3)$$

Jednadžba (10.1.3) zove se jednadžba kontinuiteta.

Definicija 10.1.1 *Ako kroz neku strujnu cijev različitih poprečnih presjeka protječe permanentno fluid onda je produkt površine (S) poprečnog presjeka i brzine (v) kroz taj presjek uvijek stalan.*



Slika 10.3.

Neka imamo neku strujnu cijev (slika 10.3.) različitih poprječnih presjeka čiji se krajevi nalaze na različitim visinama h_1 i h_2.

Onda se stacionarno gibanje fluida može opisati preko Bernoullijeve jednadžbe

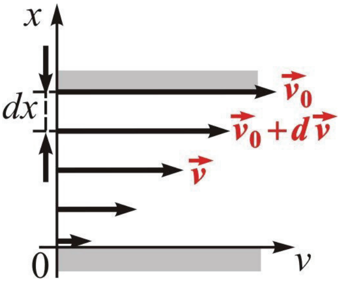
$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = const. \quad (10.1.4)$$

gdje su: ρ - gustoća fluida, v – brzina fluida kroz određeni poprječni presjek i h – visina tog poprečnog presjeka s obzirom na referentnu razinu.

Na osnovu relacije (10.1.4) vidimo da članovi zbroja imaju dimenzije tlaka tako da kod stacionarnog strujanja fluida razlikujemo tri vrste tlaka: p - statički tlak, $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ – dinamički tlak i $\rho \cdot g \cdot h$ – visinski (elevacijski) tlak.

Definicija 10.1.2 *Zakon možemo formulirati na slijedeći način: ukupan zbroj tlakova unutar stacionarnog strujanja fluida na bilo kom poprečnom presjeku je uvijek stalan.*

Posljedica: To ne znači da je svaki pojedinačni tlak stalan, nego se pojedini tlakovi mogu mijenjati jedan na račun drugoga tako da je ukupan zbroj uvijek stalan. Treba obratiti pozornost da statički tlak $p = \rho \cdot g \cdot h_1$ i elevacijski tlak $\rho \cdot g \cdot h_2$ imaju isti oblik zakonitosti, ali se radi o različitim vrijednostima h. Za statički tlak h_1 je dubina promatrane točke u fluidu, a za elevacijski tlak h_2 predstavlja visinu promatrane točke u odnosu na referentni nivo.



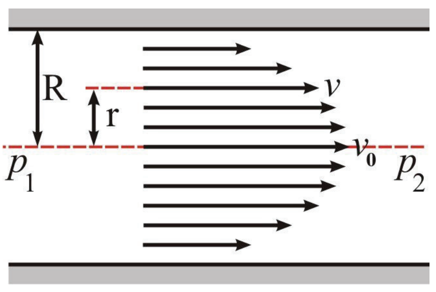
Slika 10.4.

Prilikom gibanja realnih fluida javlja se unutarnje trenje ili viskoznost. Kada jedan sloj fluida klizi po drugom onda imamo laminarno gibanje fluida. Kod realnih fluida između slojeva se pojavljuje sila trenja odnosno viskoznost. Sila unutarnjeg trenja između dva sloja koji su površine S i nalaze se na međusobnoj udaljenosti dx (slika 10.4.) iznosi

$$F_t = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dx} \tag{10.1.5}$$

gdje je η - dinamički koeficijent viskoznosti.

Jedinica za dinamički koeficijent viskoznosti je $(\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s})$.



Slika 10.5.

Za laminarno strujanje fluida kroz cijev dužine l i promjera $2R = d$ vrijedi Poisseuilleov zakon.

$$v = \frac{(p_1 - p_2) \cdot \left(R^2 - r^2\right)}{4 \cdot \eta \cdot l} \tag{10.1.6}$$

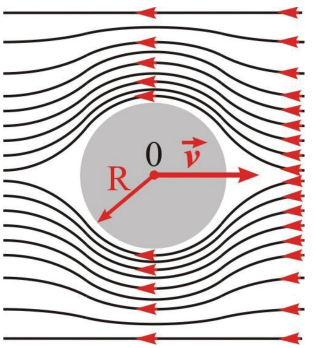
Brzina strujanja v na udaljenosti r od središta cijevi je (slika 10.5.).

Ako sa v_{sr} označimo srednju brzinu koja kada bi bila konstantan na cijelom presjeku cijevi onda je otpor pri laminarnom protjecanju viskozne tekućine:

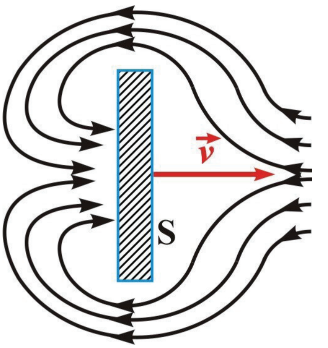
$$F_{tr} = 8\pi \cdot \eta \cdot l \cdot v_{sr} \tag{10.1.7}$$

Kada se kugla polumjera R giba kroz viskozni fluid brzinom v (slika 10.6.), a strujanje fluida oko nje je laminarno, sila trenja je dana preko Stokesovog zakona:

$$F_{tr} = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \tag{10.1.8}$$



Slika 10.6.



Slika 10.7.

Kada je strujanje turbulentno, tj. kada jedan sloj fluida zalazi u drugi pri čemu se javljaju vrtložna gibanja.

Pri vrtložnim gibanima otpor sredine je proporcionalna kvadratu brzine:

$$F_{tr} = \frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 \tag{10.1.9}$$

gdje su: C_0 – otporni broj, S – karakteristična površina, ρ - gustoća fluida i v – relativna brzina između tijela i fluida.

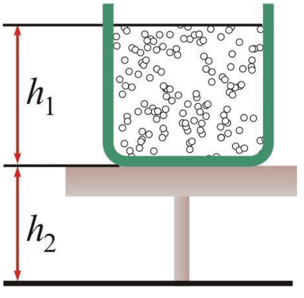
10.2 Problemski zadaci

Problem 10.2.1 *Posuda sa vodom nalazi se na stalku (slika 10.8.). Pretpostavimo da je referentni nivo na podu. Odaberite ponuđene odgovore i objasnite:*

a) na dnu posude postoji: samo statički tlak, statički i visinski tlak ili sva tri tlaka (statički, visinski i dinamički).

b) Ako pretpostavimo da je $h_1 = h_2$ onda je: visinski tlak jednak statičkom, jednak dinamički, visinski i statički tlak ili postoji samo statički tlak.

Odgovor:



Slika 10.8.

a) Na dnu posude, u odnosu na tlo, postoji statički i visinski tlak.

b) Budući da je po definiciji statički tlak jednak

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1$$

a visinski

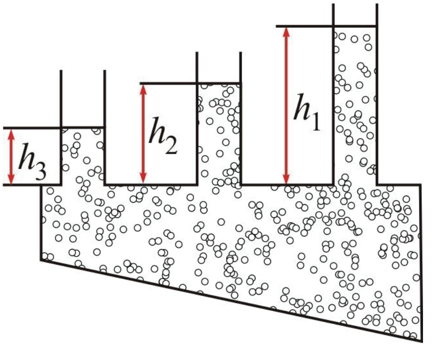
$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2$$

gdje je h_1- visina vodenog stupca, a h_2- visina dna posude u odnosu na tlo. Slijedi da uvjet $h_1 = h_2$ daje

$$p_1 = p_2$$

Problem 10.2.2 *Na slici 10.9. je prikazana horizontalna cijev različitih poprečnih presjeka. Ako pretpostavimo da se kroz cijev giba fluid, onda na osnovu manometara možemo zaključiti da je smjer gibanja fluida: u lijevo, u desno ili ne možemo odrediti smjer gibanja. Objasnite odgovor.*

Odgovor:



Slika 10.9.

Smjer gibanja fluida može biti u oba smjera jer porast dinamičkog tlaka ovisi o površini poprečnog presjeka, a ne smjera gibanja kroz poprečni presjek. Vrijedi da je

$$p_1 > p_2 > p_3$$

jer je

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} > \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} > \frac{\rho \cdot v_3^2}{2}$$

Budući da je

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = S_3 \cdot v_3$$

vrijedi

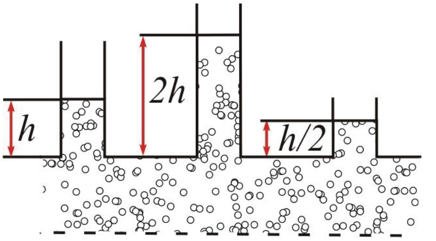
$$v_1 < v_2 < v_3$$

odnosno

$$S_1 > S_2 > S_3$$

Problem 10.2.3 *Na horizontalnoj cijevi, kroz koji se laminarno giba fluid, postavljeni su otvoreni manometri. Na slici 10.10. zadan je poprečni presjek, pri čemu je zadan samo gornji oblik cijevi. Na osnovu razine fluida u manometrima odredite donji oblik (profil) cijevi.*

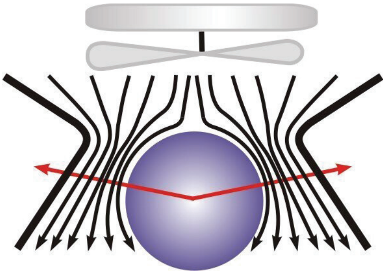
Odgovor:



Slika 10.10.

S obzirom na zadane vrijednosti u manometrima, cijev bi morala s lijeva na desno biti uža, zatim se u sredini širiti i na desnom kraju bi se trebala naglo sužavati i biti uža nego li na svom lijevom kraju. Ako se visina h u manometru udvostručuje, tada se površina poprečnog presjeka treba smanjiti za $\sqrt{2}$ puta. Na ovaj način bi mogli izračunati polumjere cijevi na pojedinim mjestima i konstruirati sliku cijevi.

Problem 10.2.4 *Na slici 10.11. je prikazana vertikalna cijev ispod koje se nalazi kuglica. Ako osiguramo strujanja zraka kroz cijev, pomoću uređaja prikazanom na slici, kuglica će se podizati. Objasnite ovu pojavu.*



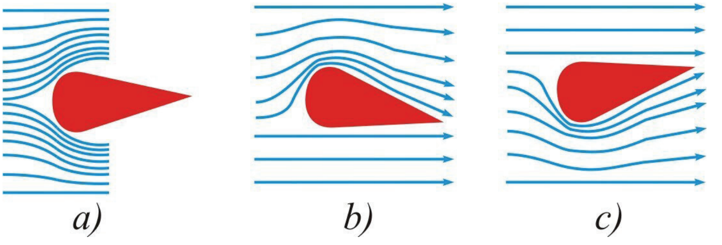
Slika 10.11.

Odgovor:

Kao što je prikazano na slici 10.11. strujanje fluida između cijevi i kuglice povećava dinamički tlak, a time se smanjuje statički tlak između kuglice i vertikalne cijevi.

Zbog razlika između statičkog tlaka na dnu kuglice i bočnog tlaka javlja se bočna sila koja djeluje na kuglicu. Bočna sila ovisno o brzini strujanja fluida može biti toliko velika da vertikalna komponenta sile, uzrokovana zbog te razlike tlaka, svladava silu težine tijela i na taj način podiže kuglicu prema gore.

Problem 10.2.5 *Na slici 10.12. su prikazani profili. Koji od njih odgovara poprečnom presjeku zrakoplovnog krila i zašto?*



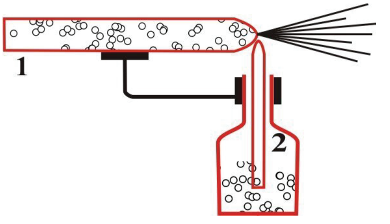
Slika 10.12.

Odgovor:

Poprečnom presjeku zrakoplovnog krila je pod b) jer jedino kod tog profila dolazi do povećanja strujanja fluida iznad krila i na taj način se povećava razlika statičkog tlaka ispod i iznad krila. Budući da je iznad krila manji tlak u odnosu na tlak ispod krila ukupna sila zbog razlika tlakova djeluje prema gore što je željeni efekt.

Problem 10.2.6 *Na slici 10.13. je prikazan pulverizator ili raspršivač kapljica. Objasnite princip rada.*

Odgovor:



Slika 10.13.

Kroz cijev (1) propušta se mlaz zraka koji na suženom kraju cijevi ima veliku brzinu. Ovako velika brzina zraka izaziva smanjenje statičkog tlaka na vrhu cijevi (2).

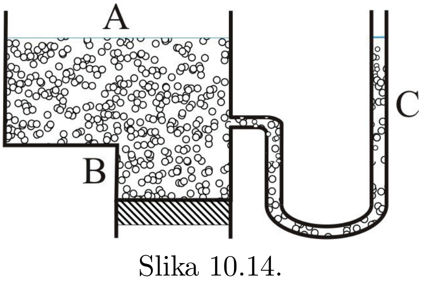
Razlika statičkog tlaka na vrhu i dnu cijevi (2) podiže razinu tekućine u cijevi. Tekućina koja se pojavi na vrhu cijevi bit će raspršena mlazom zraka.

Problem 10.2.7 *Veoma široka cilindrična posuda A ima na dnu otvor, koji se produžava u vertikalnu cijev B. Za cijev je spojen manometar C (slika 10.14.). Donji kraj cijevi zatvoren je čepom tako da su razine tekućine u posudi i manometru jednake.*

a) Koji će položaj imati razina tekućine u manometru ako izvadimo čep puštajući tekućinu da ističe (zanemarite unutrašnje trenje tekućine)?

b) Kako bi glasio odgovor ako se cijev sužava naniže?

Odgovor:

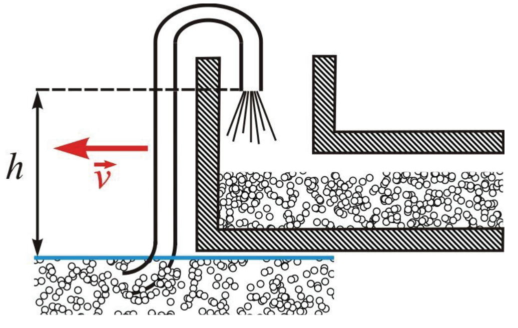


Slika 10.14.

a) Ako se izvadi čep iz vertikalne cijevi B, razina vode u manometru odgovara razini dna otvora što znači da je prisutan samo dinamički tlak.

b) Ako se vertikalna cijev B sužava, onda će razina vode u manometru biti nešto viša od razine u slučaju pod a) jer se uz dinamički tlak zbog gibanja vode javlja i dodatni statički tlak.

Problem 10.2.8 *Kako bi izbjegli zaustavljanje vlaka radi popunjavanja zaliha vode u lokomotivi, nekada se upotrebljavao sljedeći način: između šina iskopa se dugački kanal s vodom. U taj kanal sa lokomotive se spusti cijev savijena na način prikazan na slici 10.15.. Voda se podiže u cijev i prelijeva se u rezervoar lokomotive. Zbog čega se ovo događa? Je li brzina utjecanja vode u funkciji brzine lokomotive?*



Slika 10.15.

Odgovor:

Ovako savijena cijev predstavlja neku vrstu Pitove cijevi, tj. cijevi za mjerenje dinamičkog tlaka. Gibanje lokomotive za cijev može predstavljati relativno gibanje fluida u suprotnom smjeru zbog čega se javlja dinamički tlak. Povećavanjem brzine lokomotive povećava se i dinamički tlak, a time i visina vodenog stupca koja je za neku graničnu brzinu dovoljna za prelijevanje vode u rezervoar lokomotive. Ako povećavamo brzinu lokomotive dolaziti će do povećanja brzine utjecanja fluida u rezervoar zbog većeg dinamičkog tlaka.

10.3 Primjeri

Primjer 10.3.1 *Automobil prevozi ulje gustoće* $\rho = 870\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Cisterna je puna i ima oblik valjka čija je dužina* $l = 4\,\mathrm{m}$. *Odredite razliku tlakova na prednjoj i zadnjoj strani cisterne za vrijeme kočenja. Pri kočenju automobil, krećući se jednoliko usporeno, smanji brzinu s* $v_2 = 36\frac{\mathrm{km}}{h}$ *na* $v_1 = 10.8\frac{\mathrm{km}}{h}$ *za* $t = 3.5\,\mathrm{s}$.

Rješenje:

Razlika tlakova dolazi iz razloga što prilikom kočenja prednja strana cisterne mora zaustaviti ulje (ulje zbog inercije pritišće prednju površinu cisterne). Razlika tlakova jednaka je

$$\Delta p = \frac{F}{S}$$

gdje je sila F jednaka sili potrebnoj da uspori ulje, odnosno

$$F = m \cdot a = \rho \cdot V \cdot a = \rho \cdot l \cdot S \cdot a$$

pa imamo

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot l \cdot S \cdot a}{S} = \rho \cdot l \cdot a$$

Usporenje dobivamo iz

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

pa je

$$\Delta p = \rho \cdot l \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} = 870\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3.5\,\mathrm{s}} = 6960\,\mathrm{Pa} = 6.96\,\mathrm{kPa}$$

Primjer 10.3.2 *Vodovodna cijev u prvom poprečnom presjeku ima oblik kvadrata stranice a, a u drugom poprečnom presjeku ima oblik kruga promjera a. Koliki je odnos brzina protjecanja vode na mjestu prvog i drugog poprečnog presjeka?*

Rješenje:

Prvi poprečni presjek ima površinu $S_1 = a^2$, dok je drugi površine $S_2 = \frac{a^2 \cdot \pi}{4}$. Koristeći jednadžbu kontinuiteta za ova dva poprečnapresjeka dobivamo

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

odakle je traženi odnos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{a^2\cdot\pi}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785\,4$$

Primjer 10.3.3 *Kroz cijev duljine $l = 300\,\mathrm{m}$ teče voda brzinom $v = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pri zatvaranju ispusnog ventila tlak se povećava za $\Delta p = 6 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. Koliko dugo je trajalo zatvaranje ventila?*

Rješenje:

Ako se ventil zatvori za vrijeme Δt količina gibanja vode za to vrijeme padne da $p = m \cdot v$ do nule. Masa vode koja se zaustavlja, jednaka je

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l \Longrightarrow S = \frac{m}{\rho \cdot l}$$

zbog toga na ventil će djelovati impuls sile

$$F \cdot \Delta t = \Delta\,(m \cdot v) = m \cdot \Delta v = m \cdot v$$

koji izaziva povećanje tlaka na ventilu

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{F}{S} = \frac{m \cdot v}{S \cdot \Delta t} \\ \Delta t &= \frac{m \cdot v}{\Delta p \cdot S} = \frac{m \cdot v}{\Delta p \cdot \frac{m}{\rho \cdot l}} = \frac{v \cdot \rho \cdot l}{\Delta p} = \frac{0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 300\,\mathrm{m}}{6 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = 0.25\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Primjer 10.3.4 *Polumjer vodovodne cijevi smanjuje se s $10\,\mathrm{cm}$ na $5\,\mathrm{cm}$. Ako je prosječna brzina u širem dijelu $4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, pronađite prosječnu brzinu u užem području.*

Rješenje:

Koristeći jednadžbu protoka dobivamo:

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot v_1 = \left(\frac{10\,\mathrm{cm}}{5\,\mathrm{cm}}\right)^2 \cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 10.3.5 *Provjerite je li jednadžba kontinuiteta za ustaljeno nestlačivo strujanje zadovoljena za sljedeće komponente brzine:*

$$\begin{aligned} v_x &= 3x^2 - xy + 2z^2 \\ v_y &= 2x^2 - 6xy + y^2 \\ v_z &= -2xy - yz + 2y^2 \end{aligned}$$

Rješenje:
Zapravo, treba se provjeriti vrijedi li izraz

$$\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

odnosno koristeći izraz za divergenciju

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} &= 6x - y \\
\frac{\partial v_y}{\partial y} &= -6x + 2y \\
\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -y \\
\nabla \cdot \overrightarrow{v} &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\
&= (6x - y) + (-6x + 2y) + (-y) = 0
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je za ustaljeno nestlačivo strujanje zadovoljena jednadžba kontinuiteta.

Primjer 10.3.6 *Venturijev metar ima promjer cijevi od* $20\,\mathrm{cm}$ *i promjer grla od* $10\,\mathrm{cm}$. *Ako je tlak vode u cijevi* $60\,\mathrm{kPa}$, *a u grlu* $45\,\mathrm{kPa}$, *izračunajte protok vode u* $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$.

Rješenje:
Odnos površina cijevi i grla u venturijevom metru jednak je

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{20\,\mathrm{cm}}{10\,\mathrm{cm}}\right)^2 = 4$$

razlika tlakova jednaka je

$$\Delta p = 60\,\mathrm{kPa} - 45\,\mathrm{kPa} = 15000\,\mathrm{Pa}$$

iz ovih odnosa slijedi

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \frac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) \\
v^2 &= \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)} = \frac{15000\,\mathrm{Pa}}{\frac{1}{2} \cdot 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (4^2 - 1)} = \frac{15000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}}{7500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\
v &= \sqrt{2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Protok vode iznosi

$$Q = vS_2 = v\pi r^2 = \sqrt{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \pi \cdot (0.1\,\mathrm{m})^2 = 4.\,442\,9 \cdot 10^{-2}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

Primjer 10.3.7 *Pitotova cijev koja se koristi za određivanje brzine zrakoplova u odnosu na zrak postavljena je na krilo aviona. Cijev sadrži alkohol gustoće* $810\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *i bilježi visinsku razliku od* $15.0\,\mathrm{cm}$*. Uz pretpostavku da je gustoća zraka na standardnim uvjetima* $1.293\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*, pronađite brzinu aviona u* $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *u odnosu na zrak.*

Rješenje:

Izraz za brzinu jednak je

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.15\,\mathrm{m} \cdot 810\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{1.293\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 42.\,938\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 154.5\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Primjer 10.3.8 *Cisterna visine* $h = 5\,\mathrm{m}$ *napunjena je vodom. Na dnu cisterne nalazi se kružni otvor promjera* $d = 4\,\mathrm{cm}$*. Izračunajte brzinu istjecanja vode kroz otvor, masu vode koja istekne kroz otvor za vrijeme od* $t = 5\,\mathrm{min}$ *te intezitet sile kojom će voda da djeluje na zatvarač ovog otvora. (Zbog male površine otvora u odnosu na površinu cisterne zanemarite opadanje razine vode ucisterni)*

Rješenje:

Koristeći (Toričelijev) izraz za brzinu istjecanja vode na dubini h dobivamo

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 9.\,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Masa vode koja istekne kroz otvor je

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l = \rho \cdot S \cdot v \cdot t = \rho \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot t \\ &= 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{(4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 9.\,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 300\,\mathrm{s} \\ &= 3733.\,8\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Sila kojom voda djeluje na otvor jednaka je umnošku tlaka vodenog stupca i površine zatvarača otvora.

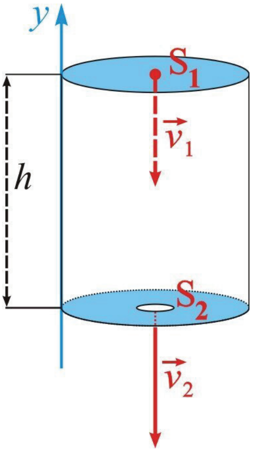
$$F = p \cdot S = \rho \cdot g \cdot h \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot \frac{(4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi}{4} = 61.64\,\mathrm{Pa}$$

Primjer 10.3.9 *Posuda cilindričnog oblika visine $h = 5\,\mathrm{m}$ ispunjena je vodom do vrha. U kojem će vremenu voda potpuno isteći kroz otvor na dnu posude ako je površina otvora jednaka 500-tom dijelu površine dna?*

Rješenje:

Odnos površine otvora S_2 i dna posude S_1 jednak je

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{500} \Longrightarrow \frac{S_1}{S_2} = 500$$



Slika 10.16.

Kako voda istječe iz posude to se razina vode u njoj smanjuje. Brzina opadanja razine vode neka je v_1, dok je brzina istjecanja vode na otvoru jednaka v_2. Koristeći jednadžbu kontinuiteta dobivamo

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Longrightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot v_1$$

Nadalje koristeći Bernoullijevu jednadžbu za točku na razini vode u posudi i točku na otvoru posude dobivamo

$$\begin{aligned} p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_a \\ v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h &= v_2^2 \end{aligned}$$

Koristeći izraz za brzinu v_2 dobivamo

$$\begin{aligned} v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h &= \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot v_1^2 \\ v_1^2 \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) &= 2 \cdot g \cdot h \\ v_1^2 &= \frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}} \cdot \sqrt{h} = k \cdot \sqrt{h} \end{aligned}$$

gdje smo uzeli oznaku $k = \sqrt{\frac{2\cdot g}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1\right)}}$ radi lakšeg zapisa.

U početnom trenutku visina je vode u posudi jednaka h, dok se tijekom istjecanja ona mijenja i na kraju iznosi $h' = 0\,\mathrm{m}$. Visinu vode označimo sa koordinatom y, pa promjenu visine (razine) vode možemo izraziti jednadžbom

$$\begin{aligned} -dy &= v_1 \cdot dt = k \cdot \sqrt{y} \cdot dt \\ -\frac{dy}{\sqrt{y}} &= k \cdot dt \end{aligned}$$

čijom integracijom dobivamo potrebno vrijeme za istjecanje vode.

$$-\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^t k \cdot dt$$

Kako je $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 \cdot \sqrt{y}$ dobivamo

$$\begin{aligned} -2 \cdot \sqrt{y} \quad &\Big|\,_h^0 = k \cdot t \,\Big|_0^t \\ -2 \cdot \left(\sqrt{0} - \sqrt{h}\right) &= k \cdot (t - 0) \\ 2 \cdot \sqrt{h} &= k \cdot t \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \cdot \sqrt{h}}{k} = \frac{2 \cdot \sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2\cdot g}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1\right)}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot (500^2 - 1)}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 504.82\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

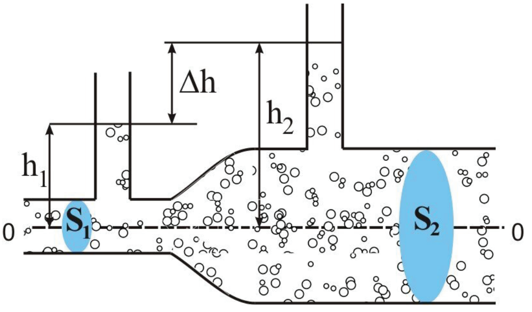
Primjer 10.3.10 *Vodoravnom cijevi protječe voda. Na mjestima gdje su presjeci cijevi $S_1 = 5\,\mathrm{cm}^2$ i $S_2 = 22\,\mathrm{cm}^2$ okomito su spojene dvije manometarske cijevi. Odredite protok vode kroz vodoravnu cijev ako je razlika razina vode u manometrima $\Delta h = 20\,\mathrm{cm}$.*

Rješenje:

Koristeći Bernoullijevu jednadžbu i jednadžbu kontinuiteta

$$p_1+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2$$

$$\begin{aligned} v_1\cdot S_1 &= v_2\cdot S_2 \\ v_2 &= \frac{S_1}{S_2}\cdot v_1 \end{aligned}$$



Slika 10.17.

uz izrazu za razliku tlakova

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho\cdot g\cdot\Delta h$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left(v_1^2 - v_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left[v_1^2 - \left(\frac{S_1}{S_2}\cdot v_1\right)^2\right] = \rho\cdot g\cdot\Delta h \end{aligned}$$

odakle je brzinav_1 jednaka

$$\begin{aligned} v_1^2\cdot\left(1-\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= 2\cdot g\cdot\Delta h \\ v_1^2 &= \frac{2\cdot g\cdot\Delta h}{\left(1-\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\Delta h}{\left(1-\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}} = S_2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\Delta h}{S_2^2-S_1^2}} \end{aligned}$$

pa je protok vode u cijevi

$$\begin{aligned} q &= S_1\cdot v_1 = S_1\cdot S_2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot\Delta h}{S_2^2-S_1^2}} \\ &= 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2\cdot 22\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.2\,\mathrm{m}}{(22\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2)^2-(5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2)^2}} \\ &= 1.02\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

ili približno jedan litar u sekundi.

Primjer 10.3.11 *Kroz horizontalni cijev teče tekućina gustoće* $\rho = 0.7\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. *Ako je brzina tekućine u užem dijelu cijevi* $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, *a razlika tlakova šireg i užeg dijela iznosi* $\Delta p = p_2 - p_1 = 5\ \mathrm{kPa}$, *za koliko je potrebno podići širi dio cijevi da bi se brzina smanjila za* 50%*? Brzina u užem dijelu cijevi je konstantna.*

Rješenje:

Izračunajmo brzinu tekućine u širem dijelu cijevi. Užem dijelu cijevi pridodajmo indekse 1, a širem 2. Tada Bernoullijeva jednadžba daje

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

kako je cijev horizontalna, tu razinu odaberimo za referentnu, tj.

$$h = h_1 = h_2 = 0$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 &= p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \\
v_2^2 &= v_1^2 - \frac{2 \cdot (p_2 - p_1)}{\rho} = v_1^2 - \frac{2 \cdot (\Delta p)}{\rho} \\
v_2 &= \sqrt{v_1^2 - \frac{2 \cdot (\Delta p)}{\rho}} = 3.27\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Sada podignimo širi dio cijevi na visinu $h_2 = h$, a brzinu u širem dijelu cijevi označimo sa v_2' i tražimo da bude

$$v_2' = 0.5 \cdot v_2 = 1.64\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$p_1 + \underbrace{\rho \cdot g \cdot h_1}_{=0} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(v_2'\right)^2$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\rho \cdot g \cdot h &= p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(v_2'\right)^2 \\
h &= \frac{v_1^2 - (v_2')^2}{2 \cdot g} - \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} = \frac{v_1^2 - (v_2')^2}{2 \cdot g} - \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = 0.41\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

Primjer 10.3.12 *Iz pumpe u prizemlju zgrade, visoke* $h = 35\,\mathrm{m}$*, ulazi voda u cijev promjera* $r_1 = 3\,\mathrm{cm}$ *po tlakom od* $p = 10\,\mathrm{bar}$ *brzinom od* $v_1 = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Koliki je volumni protok vode? Kolika je brzina* v_2 *i tlak u potkrovlju zgrade ako je tamo promjer cijevi tri puta manji nego u prizemlju?*

Rješenje:
Volumni protok dobivamo iz izraza

$$\begin{aligned} q &= S \cdot v = r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1 \\ &= (0.03\,\mathrm{m})^2 \cdot \pi \cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5.65 \cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Brzinu u potkrovlju zgrade određujemo iz jednadžbe kontinuiteta

$$\begin{aligned} q &= S_i \cdot v_i = konst. \\ S_1 \cdot v_1 &= S_2 \cdot v_2 \\ v_2 &= \frac{S_1}{S_2} \cdot v_1 = \frac{r_1^2 \cdot \pi}{r_2^2 \cdot \pi} \cdot v_1 \\ &= \frac{r_1^2}{\left(\frac{r_1}{3}\right)^2} \cdot v_1 \\ &= 9 \cdot v_1 = 9 \cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 18\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Iz Bernoullijeve jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 &= konst. \\ p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 &= p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \end{aligned}$$

pa dobivamo tlak u potkrovlju zgrade

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right) \\ &= p_1 - \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho}{2} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right) \\ &= 10^6\,\mathrm{Pa} - 10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 35\,\mathrm{m} + \frac{10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{2}\left[\left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(18\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] \\ &= 4.966\,5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

Primjer 10.3.13 *Staklena kuglica polumjera* $r = 5\,\mathrm{mm}$ *pada u tekućem glicerinu. Nakon nekog vremena brzina kuglice postaje konstantna. Odredite tu konstantnu brzinu i početno ubrzanje kuglice.*

Rješenje:

Jednadžba gibanja kuglice u glicerinu glasi

$$\sum_i F_i = m \cdot g - F_u - F_{tr} = m \cdot a$$

Budući da je viskoznost glicerina velika, Reynoldsov broj je malen pa vrijedi Stokesov zakon:

$$F_{tr} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

odnosno jednadžba gibanja poprima oblik

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot g - \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_g \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot a$$

Početno ubrzanje kuglice dobivamo iz uvjeta da je $v = 0$

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot a_0 = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot g - \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_g \cdot g$$

$$a_0 = \frac{\left(\rho_s - \rho_g\right)}{\rho_s} \cdot g = \frac{\left(2.53 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1.21 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)}{2.53 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 5.12 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Konstantna (granična) brzina se dobiva iz uvjeta $a = 0$

$$0 = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot a = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_s \cdot g - \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_g \cdot g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

$$6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \left(\rho_s - \rho_g\right) \cdot g$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \left(\rho_s - \rho_g\right) \cdot g}{6\pi \cdot \eta \cdot r} \\ &= \frac{2r^2 \cdot \left(\rho_s - \rho_g\right) \cdot g}{9 \cdot \eta} \\ &= \frac{2 \cdot \left(5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \left(2.53 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1.21 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)}{9 \cdot 0.86\,\mathrm{Pa\,s}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 8.37 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

a Reynoldsov broj je

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_g \cdot v \cdot 2r}{\eta} = \frac{1.21 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 8.365\,1 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{0.86\,\mathrm{Pa\,s}} = 1.18$$

pa Stokesov zakon vrijedi za ovo gibanje.

Primjer 10.3.14 *Voda se prenosi kroz cijev promjera* 8 cm *i duljine* 4 km *brzinom od* $120 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$. *Izračunajte tlak i tlačnu visinu potrebnu za održavanje protoka. Koeficijent viskoznosti vode,* $\eta = 0.001\,\mathrm{Pa\,s}$ *jedinica* ($1\,\mathrm{atm} = 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$).

Rješenje:
Volumen tekućine koji svake sekunde proteče kroz cijev jednak je

$$V = \frac{\pi r^4 p}{8\eta l}$$

odakle je tlak

$$p = \frac{8\eta l V}{\pi r^4} = \frac{8 \cdot 0.001\,\mathrm{Pa\,s} \cdot 4000\,\mathrm{m} \cdot 2 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}}{\pi \cdot (0.04\,\mathrm{m})^4} = 7957.7\,\mathrm{Pa}$$

odakle je tlačna visina jednaka

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{7957.7\,\mathrm{Pa}}{1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.81\,\mathrm{m}$$

Primjer 10.3.15 *Dvije kapilarne cijevi AB i BC spojene su jedna s drugom u točki B. AB je duga* 16 cm *i promjera* 0.4 cm. *BC dugačak je* 4 cm *i promjera* 0.2 cm. *Kompozitna cijev se drži vodoravno kao u Poiseuilleovom pokusu, s A spojenom na posudu s vodom dajući konstantnu visinu od* 3 cm *i C otvorenom prema zraku. Izračunajte razliku tlaka između B i C.*

Rješenje:
Razlika tlakova jednaka je

$$\begin{aligned}
p_A - p_B &= \frac{8\eta l_1 Q}{\pi r^4} = \frac{8\eta Q}{\pi} \cdot \frac{l_1}{r^4} \\
&= \frac{8\eta Q}{\pi} \cdot \frac{0.16\,\mathrm{m}}{(0.002\,\mathrm{m})^4} = \frac{8\eta Q}{\pi} \cdot \left(10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right) \\
p_B - p_0 &= \frac{8\eta Q}{\pi} \cdot \frac{0.04\,\mathrm{m}}{(0.001\,\mathrm{m})^4} = \frac{8\eta Q}{\pi} \cdot \left(4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right)
\end{aligned}$$

zbrajanjem prethodne dvije jednadžbe dobiva se

$$\begin{aligned} p_A - p_0 &= \frac{8\eta Q}{\pi}\cdot\left(10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right) + \frac{8\eta Q}{\pi}\cdot\left(4\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right) \\ &= \frac{8\eta Q}{\pi}\cdot\left(5\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right) \end{aligned}$$

dok se dijeljenjem posljednje dvije dobije

$$\frac{p_B - p_0}{p_A - p_0} = \frac{\frac{8\eta Q}{\pi}\cdot\left(4\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right)}{\frac{8\eta Q}{\pi}\cdot\left(5\cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}\right)} = \frac{4}{5}$$

odnosno

$$p_B - p_0 = \frac{4}{5}\cdot(p_A - p_0) = \frac{4}{5}\cdot 3\,\mathrm{cm} = 2.4\,\mathrm{cm}\ \text{stupca vode}$$

Primjer 10.3.16 *Kroz horizontalnu cijev polumjera r i duljine l protječe $Q\left[\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{s}}\right]$ vode. Druga cijev polovice duljine, ali radijusa $2r$, spojena je paralelno na istu tlačnu glavu. Kolika će ukupna količina vode protjecati u sekundi kroz te dvije cijevi?*

Rješenje:
Protok za prvu cijev zadan je izrazom

$$Q_1 = \frac{\pi p r^4}{8\eta l}$$

dok je za drugu cijev (prema zadatku ulazni tlak je jednak) protok

$$Q_2 = \frac{\pi p\,(2r)^4}{8\eta\left(\frac{l}{2}\right)} = 32 Q_1$$

pa je ukupni tok kroz te dvije cijevi jednak

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 = 33 Q_1 = \frac{33\pi p r^4}{8\eta l}$$

Primjer 10.3.17 *Izračunajte brzinu padanja kapi vode promjera $R = 0.2\,\mathrm{mm}$ u zraku ($\eta = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$) nakon $t = 0.1\,\mathrm{s}$. Kolika je granična brzina kapljice? Koliki je prevaljeni put u vremenu $t = 0.1\,\mathrm{s}$ (gustoća zraka iznosi $\rho_z = 1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)?*

Rješenje:

Na kapljicu djeluju sljedeće sile: sila zemljine teže, uzgon i sila viskoznog trenja koja u slučaju laminarnog strujanja po Stokesovu zakonu iznosi

$$F_{tr} = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v = k \cdot v$$

Jednadžba gibanja kapljice glasi

$$\begin{aligned} m \cdot a &= m \cdot g - F_{tr} - F_u \\ \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho \cdot a &= \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho \cdot g - k \cdot v - \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho_z \cdot g \\ a &= L - M \cdot v \end{aligned}$$

gdje su:

$$L = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_z}{\rho}\right) \text{ i } M = \frac{k}{m} = \frac{6\pi \cdot \eta \cdot R}{m}$$

Separacijom varijabli

$$\frac{dv}{dt} = L - M \cdot v \Longrightarrow \frac{dv}{L - M \cdot v} = dt$$

i zamjenom $L - M \cdot v = u$, $dv = -\frac{du}{M}$ se dobiva

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -M \cdot dt \Big/ \int \Longrightarrow \int \frac{du}{u} = -M \cdot \int dt \\ u &= L - M \cdot v = C \cdot e^{-Mt} \end{aligned}$$

te koristeći rubne uvjete $v = 0$, za $t = 0$ imamo $C = L$ odnosno

$$L - M \cdot v = L \cdot e^{-M \cdot t}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{L}{M} \cdot \left(1 - e^{-M \cdot t}\right) = \frac{g \cdot \left(1 - \frac{\rho_z}{\rho}\right)}{\frac{k}{m}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) \\ &= \frac{m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_z}{\rho}\right)}{6\pi \cdot \eta \cdot R} \left(1 - e^{-\frac{6\pi \cdot \eta \cdot R}{m} \cdot t}\right) \\ &= \frac{2 \cdot R^2 \cdot g}{9 \cdot \eta} \cdot (\rho - \rho_z) \cdot \left(1 - e^{-\frac{9 \cdot \eta}{2 \cdot R^2 \cdot \rho} \cdot t}\right) \end{aligned}$$

Za $t = 0.1\,\mathrm{s}$ dobivamo brzinu

$$\begin{aligned} v\,(0.1\,\mathrm{s}) &= \frac{2\cdot\left(2\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9\cdot\left(2\cdot10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}\right)}\cdot\left(10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}-1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) \\ &\quad\cdot\left(1-e^{-\frac{9\cdot\left(2\cdot10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}\right)}{2\cdot\left(2\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2\cdot10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\cdot 0.16\,\mathrm{s}}\right) = 0.88\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Graničnu brzinu dobivamo iz uvjeta

$$a = L - M\cdot v_g = 0 \Longrightarrow v_g = \frac{L}{M}$$

odnosno

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{g\cdot\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{\frac{6\pi\cdot\eta\cdot R}{m}} = \frac{m\cdot g\cdot\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{6\pi\cdot\eta\cdot R} = \frac{2\cdot R^2\cdot g}{9\cdot\eta}\cdot(\rho-\rho_z) \\ &= \frac{2\cdot\left(2\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9\cdot\left(2\cdot10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}\right)}\cdot\left(10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}-1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) = 4.35\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Put se dobiva integracijom brzine

$$\begin{aligned} s &= \int v\cdot dt = \int\frac{L}{M}\cdot\left(1-e^{-M\cdot t}\right)\cdot dt \\ &= \frac{L}{M}\cdot\int\left(1-e^{-M\cdot t}\right)\cdot dt \\ &= \frac{L}{M}\cdot t - \frac{L}{M^2}\cdot\left(e^{-M\cdot t}-1\right) \\ &= v_g\cdot t - \frac{v_g}{M}\cdot\left(e^{-\frac{L}{v_g}\cdot t}-1\right) \\ &= v_g\cdot t - \frac{\rho\cdot v_g^2}{g\cdot(\rho-\rho_z)}\cdot\left(e^{-\frac{g\cdot(\rho-\rho_z)}{\rho\cdot v_g}\cdot t}-1\right) \end{aligned}$$

odakle za prijeđeni put u $t = 0.1\,\mathrm{s}$ dobivamo

$$s\,(0.1\,\mathrm{s}) = 0.82\,\mathrm{m}$$

Reynoldsov broj je

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_z\cdot v_g\cdot d}{\eta} = \frac{1.225\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 4.35\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}}{2\cdot10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}} = 26.67$$

pa je strujanje laminarno.

Primjer 10.3.18 *Dvije kišne kapi padaju kroz zrak krajnjom brzinom od v_T. Ako se kapi spoje, koja će biti nova konačna brzina?*

Rješenje:
Konačna brzina zadana je izrazom

$$v_T = \frac{2}{9} r^2 g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\eta}$$

gdje je $r-$polumjer kapi, ρ_1, ρ_2 su gustoće kapi i zraka, te η koeficijent viskoznosti. Ako je novi polumjer r' spojenih kapi, tada je nova konačna brzina jednaka

$$\frac{v'_T}{v_T} = \frac{r'^2}{r^2}$$

Uz pretpostavku da su kapi nekompresibilne polumjer spojenih kapi dobiamo iz odnosa volumena

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}\left(r'\right)^3 &= 2 \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \\ r' &= \sqrt[3]{2} \cdot r \end{aligned}$$

Iz dobivenog izraza slijedi izraz za konačnu brzinuspojenih kapi u obliku

$$v'_T = \frac{r'^2}{r^2} \cdot v_T = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot v_T = 4^{\frac{1}{3}} \cdot v_T$$

Primjer 10.3.19 *Tekućina gustoće* $\rho = 790 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *i viskoznosti* $\eta = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Pa\,s}$ *protječe kroz cijev polumjera* $r = 1\,\mathrm{dm}$ *i duljine* $l = 1.5\,\mathrm{km}$. *Kolika je snaga pumpe ako je protok kroz cijev* $q = 10 \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$*? Stupanj korisnog djelovanja pumpe iznosi* $\eta_k = 0.6$.

Rješenje:
Srednja brzina protjecanja fluida kroz cijev iznosi

$$\overline{v} = \frac{q}{r^2 \cdot \pi} = \frac{10^{-2} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}{(0.1\,\mathrm{m})^2 \cdot \pi} = 0.32 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Budući da je Reynoldsov broj

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_e \cdot v \cdot d}{\eta} = \frac{790 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.318\,31 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0.2\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Pa\,s}} = 1676.4$$

strujanje fluida je laminarno. Razlika tlakova potrebna za takvo protjecanje dobiva se iz Poisseuilleova zakona

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot \overline{v}}{d^2} = \frac{32 \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Pa\,s} \cdot 1500\,\mathrm{m} \cdot 0.32\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(0.2\,\mathrm{m})^2} = 11460\,\mathrm{Pa}$$

pa je potrebna snaga pumpe

$$P = q \cdot \Delta p = 10^{-2}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 11460\,\mathrm{Pa} = 114.6\,\mathrm{W}$$

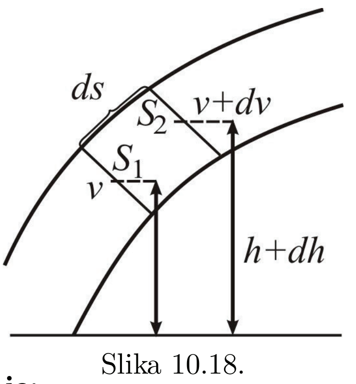
Budućida je stupanj korisnog djelovanja jednak $\eta_k = 0.6$ snaga pumpe iznosi

$$P_s = \frac{P}{\eta_k} = \frac{114.6\,\mathrm{W}}{0.6} = 191\,\mathrm{W}$$

Primjer 10.3.20 *Pokažite da Bernoullijeva jednadžba u diferencijalnom obliku glasi*

$$dp + \rho \cdot g \cdot dh + \rho \cdot v \cdot dv = 0$$

i integrirajte tu jednadžbu za stlačive plinove, pretpostavljajući da gustoća varira s tlakom adijabatski, tj. da je $\frac{p}{\rho^\kappa} =$ *konst., gdje je* κ *adijabatski koeficijent plina.*



Slika 10.18.

Rješenje:

Na djelić fluida na strujnici u strujnoj cijevi primjenjuje se drugi Newtonov zakon. Na presjeku $S_1 = S$ tlak je p, brzina v i visina od neke proizvoljne reverentne razine h. Na presjeku $S_2 = S + dS$ tlak je

$p + dp$, brzina $v + dv$ i visina $h + dh$. Rezultantna sila koja djeluje na promatrani djelić fluida jest

$$F = p \cdot S_1 - (p + dp) \cdot S_2 - \rho \cdot g \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot ds \cdot \frac{dh}{ds} = -dp \cdot S - \rho \cdot g \cdot S \cdot dh$$

Primjenom II.Newtonova zakona slijedi

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ -dp \cdot S - \rho \cdot g \cdot S \cdot dh &= \rho \cdot S \cdot ds \cdot \frac{dv}{dt} / : S \\ -dp - \rho \cdot g \cdot dh &= \rho \cdot v \cdot dv \end{aligned}$$

$$dp + \rho \cdot g \cdot dh + \rho \cdot v \cdot dv = 0$$

integriranjem jednadžbe dobiva se

$$h + \frac{v^2}{2 \cdot g} + \int \frac{dp}{\rho \cdot g} = konst.$$

Uzimajući u obzir da je $\frac{p}{\rho^\kappa} = konst.$ nakon provedene integracije se dobiva

$$g \cdot h_1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p_1 \cdot V_1 + \frac{v_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{1}{m} \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p_2 \cdot V_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

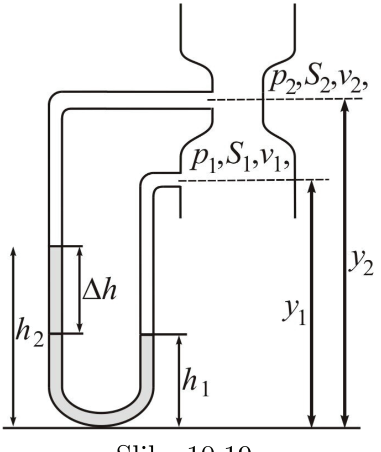
gdje su: m masa plina, V volumen, v brzina, h_1 i h_2 referentne visine, te p tlak plina.

10.4 Zadatci

Problem 10.4.1 *Poprečni je presjek klipa u vodoravno položenoj štrcaljki*
$S_1 = 1.6\,\mathrm{cm}^2$, *a presjek otvora je* $S_2 = 1\,\mathrm{mm}^2$. *Za koliko će vremena isteći voda ako na klip djeluje okomita sila od* $F = 5\,\mathrm{N}$ *i ako je hod klipa* $l = 4\,\mathrm{cm}$?

Rezultat: $t = 0.81\,\mathrm{s}$.

Problem 10.4.2 *Voda prolazi kroz okomitu Ventuijevu cijev koja na ulazu ima promjer* $d_1 = 4\,\mathrm{cm}$, *a na suženom dijelu, koji je* $h = 0.5\,\mathrm{m}$ *iznad ulaznog, promjer iznosi* $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$. *Na ulazu je tlak* $p_1 = 160\,\mathrm{kPa}$, *a na suženom dijelu* $p_2 = 80\,\mathrm{kPa}$. *Izračunajte brzinu protjecanja i protok vode kroz cijev. Kolika bi bila razlika stapaca žive u živinom manometru u obliku U-cijevi spojenom između ulaza i suženja cijevi? Zanemarite unutrašnje trenje fluida.*



Slika 10.19.

Rezultat: $v_1 = 3.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $q = 3.97\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$, $\Delta h = 0.61\,\mathrm{m}$.

Problem 10.4.3 *U spremniku se nalazi voda do visine* $h_v = 2\,\mathrm{m}$, *a iznad vode je sloj ulja gustoće* $\rho_u = 850\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *i debljine* $d = 1\,\mathrm{m}$. *Kolika je početna brzina istjecanja vode kroz otvor na dnu spremnika?*

Rezultat: $v = 7.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

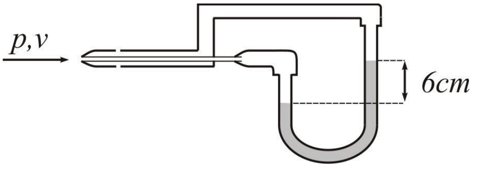
Problem 10.4.4 *Mlaz vode izlazi iz kružnog otvora promjera* $d_1 = 2\,\mathrm{cm}$ *i penje se okomito do visine* $h = 4.1\,\mathrm{m}$. *Koliki je promjer mlaza* d_2 *na visini od* $1\,\mathrm{m}$*?*

Rezultat: $d_2 = 2.14\,\mathrm{cm}$.

Problem 10.4.5 *Kroz vodoravnu cijev sa suženjem na jednom mjestu teče tekućina gustoće* $\rho_t = 900\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Ako je brzina tekućine u užem dijelu cijevi* $v_1 = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, *a razlika tlakova šireg i užeg dijela iznosi* $\Delta p = 5\,\mathrm{kPa}$, *za koliko je potrebno podići suženje cijevi da bi se brzina u njemu smanjila na polovinu.*

Rezultat: $\Delta h = 0.49\,\mathrm{m}$.

Problem 10.4.6 *Pitot-Prandtlova cijev nalazi se u struji zraka gustoće*
$\rho_z = 1.2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, *brzine* v *i tlaka* p. *Kolika je brzina zraka ako je razlika stupaca vode u diferencijalnom manometru spojenom na Pitotovu cijev* $\Delta h = 6\,\mathrm{cm}$*?*



Slika 10.20.

Rezultat: $v = 31\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 10.4.7 *Manometri na Pitotovoj cijevi u zrakoplovu pokazuju statički tlak od* $80\,\mathrm{kPa}$ *i ukupan tlak od* $1000\,\mathrm{kPa}$. *Uz pretpostavku da je gustoća zraka* $\rho_z = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *izračunajte brzinu* v_1 *zrakoplova ako se pretpostavlja da je zrak nestlačiv fluid i brzinu* v_2 *ako se pretpostavlja adijabatski proces.*

Rezultat: $v_1 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = 191\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 10.4.8 *Kolika je snaga crpke koja kroz cijev stalnog presjeka crpi vodu na visinu* $h = 3\,\mathrm{m}$ *ako je razlika tlakova* $\Delta p = 60\,\mathrm{kPa}$*, protok vode* $q = 10\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$*, a gubitak tlaka zbog viskoznog trenja* $\Delta p_v = 40\,\mathrm{kPa}$*? stupanj korisnog djelovanja crpke iznosi* $\eta = 0.7$*.*

Rezultat: $P = 1.9\,\mathrm{kW}$.

Problem 10.4.9 *Nafta protječe kroz cijev promjera* $d = 2.54\,\mathrm{cm}$ *i duljine*
$l = 18\,\mathrm{m}$ *srednjom brzinom* $\overline{v} = 0.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Koliko je smanjenje tlaka u cijevi uzrokovano viskožnošću ako je* $\eta = 0.1\,\mathrm{Pa\,s}$*? Koliko iznosi Reynoldsov broj za ovo protjecanje? Gustoća nafte iznosi* $\rho_n = 850\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*.*

Rezultat: $\Delta p = 8928\,\mathrm{Pa}$, $\mathrm{Re} = 22$.

Problem 10.4.10 *Tekućina viskoznosti* $\eta = 0.1\,\mathrm{Pa\,s}$ *protječe kroz cijev promjera* $d = 2\,\mathrm{cm}$*, duljine* $l = 42\,\mathrm{m}$*. Razlika tlaka između početka i kraja cijevi iznosi* $\Delta p = 60\,\mathrm{kPa}$*. Izračunajte kolika je srednja brzina protjecanja, brzina protjecanja u sredini cijevi i na udaljenosti* $r = 0.2\,\mathrm{cm}$ *od stijenke cijevi.*

Rezultat: $\overline{v} = 17.9\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, $v_{sr} = 35.7\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, $v_r = 12.9\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

Problem 10.4.11 *Pokus pokazuje da laminarno strujanje fluida prelazi u turbulentno srujanje kada brzina zraka kroz cijev promjera* $d = 10\,\mathrm{cm}$ *pređe kritičnu vrijednost od* $v = 33\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$*. Potrebno je izračunati kritični Reynoldsov broj. Kolika bi bila kritična brzina za strujanje vode kroz cijev promjera* $d_v = 2.54\,\mathrm{cm}$*?*

Rezultat: $\mathrm{Re}_k = 2200$, $v_k = 8.7\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

Problem 10.4.12 *Kapljica vode u nekom oblaku ima promjer od* $d = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$*. Kojom najvećom brzinom te kapljice mogu padati kroz zrak? Za viskoznost zraka uzmite* $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$*.*

Rezultat: $v = 0.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 10.4.13 *Odredite brzinu kišne kapi u trenutku kada padne na tlo ako se kap smatra kuglicom polumjera* $r = 1\,\mathrm{mm}$*, a koeficijent vikoznosti zraka iznosi* $\eta = 1.82 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$*.*

Rezultat: $v = 120\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.