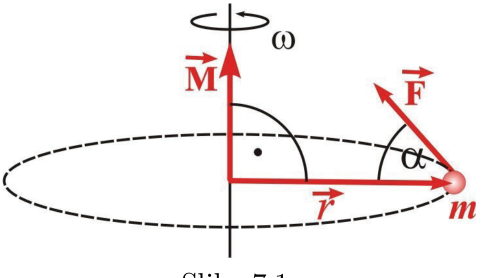
Poglavlje 7

ROTACIJA KRUTOG TIJELA

7.1 Osnovni pojmovi i definicije

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da je rotacijsko gibanje jedan od osnovnih oblika gibanja koje se opisuje kutnim parametrima ($\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{\alpha}$ itd.). Također iz uvjeta statike čvrstog tijela vidjeli smo da se za opis uzroka rotacije koristi moment sile $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ – gdje je $\overrightarrow{r}$ vektor od osi rotacije do hvatišta sile.



Slika 7.1.

Modul vektora $\overrightarrow{M}$ možemo pisati prema vektorskom produktu:

$$M = rF \sin \alpha \tag{7.1.1}$$

U slučaju da je sila okomita na vektor položaja imamo ($\alpha = 90°$) pa vrijedi

$$M = rF \tag{7.1.2}$$

Koristeći analogiju između translacijskog i rotacijskog gibanja možemo odrediti oblik II. Newtonovog zakona za rotacijske sustave:

$$\begin{array}{lll} Translacija & Analogija & Rotacija \\ & \overrightarrow{F} \to \overrightarrow{M} & \\ \overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{a} \to \overrightarrow{\alpha} & \overrightarrow{M} = I \cdot \overrightarrow{\alpha} \\ & m \to I & \end{array} \tag{7.1.3}$$

Vidimo da sili odgovara moment sile, ubrzanju kutno ubrzanje te masi moment inercije.

Definicija 7.1.1 *Ako na neko tijelo djeluje moment sile $\left(\overrightarrow{M}\right)$, onda će ono ubrzavati ($\overrightarrow{\alpha}$) tako da je to ubrzanje proporcionalno momentu sile i obrnuto proporcionalno momentu inercije (I) tog krutog tijela: $\overrightarrow{\alpha} = \frac{\overrightarrow{M}}{I}$.*

Moment inercije (I) je fizikalna tenzorska veličina koja ovisi o rasporedu masa u odnosu na osu rotacije. Moment inercije materijalne točke koja rotira na rastojanju (r) od osi rotacije:

$$I = m \cdot r^2 \tag{7.1.4}$$

Za svako drugo tijelo moment inercije se određuje prema ovoj osnovnoj relaciji kao suma ili integral svih materijalnih točaka promatranog tijela koji rotira oko neke glavne osi:

$$I = \lim_{i \to \infty} \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \int_0^m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \tag{7.1.5}$$

Za svako se tijelo mora posebno izračunati moment inercije (tromosti). Moment inercije (tromosti) nekih jednostavnijih tijela:

1. materijalna točka mase m na udaljenosti r od osi rotacije $I = mr^2$,
2. tanak prsten mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem prstena okomito na ravninu prstena $I = mr^2$,
3. homogeni valjak (ploča, disk) mase m polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem mase okomito na osnovicu valjka $I = \frac{1}{2}mr^2$,

4. šuplji valjak mase m, unutarnjeg polumjera r_1 i vanjskog polumjera r_2 s obzirom na uzdužnu os koja prolazi središtem mase $I = \frac{m\left(r_1^2+r_2^2\right)}{2}$,

5. kugla mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem mase $I = \frac{2}{5}mr^2$,

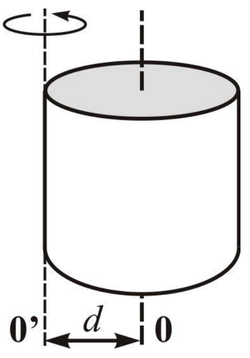
6. homogeni štap mase m i duljine l s obzirom na os koja je okomita na štap i prolazi središtem mase štapa $I = \frac{1}{12}ml^2$,

7. pravokutna ploča stranica a i b s obzirom na os koja prolazi središtem mase $I = \frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)$.

Navedeni momenti tromosti odnose se na glavne osi rotacije. Za neku sporednu os rotacije koristi se za određivanje momenta tromosti Steinerova teorema.

Definicija 7.1.2 *Ako tijelo rotira oko sporedne osi O′, onda je ukupni moment tromosti* (I) *jednak zbroju glavnog momenta tromosti* I_0 *i produkta mase tijela* (m) *s kvadratom rastojanja* (d) *između glavne i sporedne osi rotacije:*

$$I = I_0 + md^2 \tag{7.1.6}$$



Slika 7.2.

Jedinica za moment tromosti je

$$I\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\right] = m\,[\mathrm{kg}]\cdot r^2\left[\mathrm{m}^2\right] \tag{7.1.7}$$

Istom analogijom kojom smo se koristili za definiranje II. Newtonovog zakona za rotacijske sustave možemo upotrijebiti za određivanje momenta količine gibanja $\left(\overrightarrow{L}\right)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Translacija} & \text{Analogija} & \text{Rotacija} \\ & \overrightarrow{p} \to \overrightarrow{L} & \\ \overrightarrow{p} = m\cdot\overrightarrow{v} & m \to I & \overrightarrow{L} = I\cdot\overrightarrow{\omega} \\ & \overrightarrow{v} \to \overrightarrow{\omega} & \end{array} \tag{7.1.8}$$

Definicija 7.1.3 *Tijelo koje rotira nekom kutnom brzinom* ($\overrightarrow{\omega}$) *opisuje se momentom količine gibanja* $\left(\overrightarrow{L}\right)$ *koji je jednak produktu momenta inercije* (I) *tog tijela i navedene brzine:*

$$\overrightarrow{L} = I \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{7.1.9}$$

Posljedica: Djelovanjem momenta sile na neko tijelo mijenja se moment količine gibanja i on je jednaka toj promjeni:

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \tag{7.1.10}$$

Izvedena relacija odgovara također II. Newtonovom zakonu za rotacijske sustave. Iz relacije (6.8) vidimo da za izolirane sustave, tj. rotacijske sustave na koje ne djeluje moment sile ili ako je ukupni moment sile jednak nuli

$$\overrightarrow{M} = 0 \rightarrow \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = 0 \tag{7.1.11}$$

odnosno

$$\overrightarrow{L} = const. \tag{7.1.12}$$

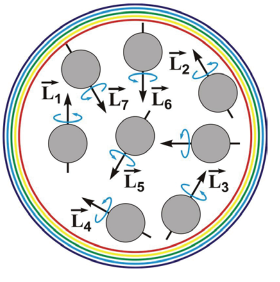
Relacija (7.1.12) predstavlja zakon o očuvanju momenta količine gibanja.

Definicija 7.1.4 *Ukupni moment količine gibanjau mehanički izoliranom sustavu uvijek ostaje stalan.*

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}_1 + \overrightarrow{L}_2 + \cdots + \overrightarrow{L}_n = \sum_i \overrightarrow{L}_i = const. \tag{7.1.13}$$

Posljedica: U nekom izoliranom sustavu moment količine gibanja pojedinih tijela može se mijenjati, ali ukupni moment uvijek je stalan.

Također ako jedno tijelo mijenja svoj moment inercije (I) pri rotaciji, onda se mijenja i kutna brzina tako da je moment količine uvijek stalan:



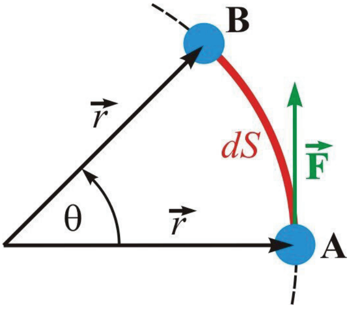
Slika 7.3.

$$\overrightarrow{L} = I_1 \overrightarrow{\omega}_1 = I_2 \overrightarrow{\omega}_2 \tag{7.1.14}$$

Dimenizija za moment količine gibanja je

$$L\left[\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right] = I\left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\right] \cdot \omega \left[\mathrm{s}^{-1}\right] \tag{7.1.15}$$

Rad, energija pri rotaciji



Slika 7.4.

Kako bismo odredili rad pri rotacijskom gibanju promatrajmo jednostavan slučaj.

Neka na neku česticu mase (m) (vidi sliku7.4.) djeluje tangencijalna sila $\overrightarrow{F}$ tako da zakrene tijelo za neki kut (θ). Na osnovu definicije rada (Definicija 4.1.1.):

$$dW = Fds \tag{7.1.16}$$

za mali kut (θ) imamo da je $ds = r\ d\theta$, pa je

$$dW = Fr\ d\theta \tag{7.1.17}$$

Budući da je odnos vektora sile i vektora položaja ortogonalan na osnovi definicije momenta sile možemo pisati: $M = rF$, odnosno dobivamo relaciju za rad rotacionih sustava u obliku

$$dW = M\ d\theta \tag{7.1.18}$$

Definicija 7.1.5 *Pri rotaciji rad je jednak integralu momenta sile (M) pri prevaljenom kutu (θ)*

$$W = \int_0^\theta M\ d\theta \tag{7.1.19}$$

Na osnovu relacije za rad i definicije možemo naći snagu:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{7.1.20}$$

U specijalnom slučaju za $M = const.$

$$P = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \tag{7.1.21}$$

Relaciju za kinetičku energiju pri rotaciji možemo naći na osnovu definicije rada. Poznato nam je kako je rad mjera promjene energije $W = \Delta E$.

Promatrajmo jednostavan primjer; neka pod djelovanjem momenta sile (za $M = const.$) tijelo ubrzava sa početne brzine ω_1 na brzinu ω_2 tada je izvršen rad:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \; d\theta \tag{7.1.22}$$

$$M = I \cdot \alpha = I\frac{d\omega}{dt} \tag{7.1.23}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega} \tag{7.1.24}$$

pa supstitucijom u jednadžbu (7.1.22) dobivamo:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\frac{d\omega}{dt} \cdot d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\frac{d\omega}{\frac{d\theta}{\omega}} \cdot d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \;\cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2}I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2}I \cdot \omega_1^2 = (E_{k_2})_{rot} - (E_{k_1})_{rot} \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

Odakle slijedi

$$(E_k)_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \tag{7.1.26}$$

Relacija (7.1.26) određuje rotacijsku kinetičku energiju tijela momenta inercije (I) koje se giba kutnom brzinom ω. Ako se tijelo giba translacijski nekom brzinom $\overrightarrow{v}$ i rotacijski brzinom $\overrightarrow{\omega}$ onda je ukupna kinetička energija tog tijela jednaka zbroju translacijske $(E_k)_t$ i rotacijske $(E_k)_{rot}$ kinetičke energije:

$$E = (E_k)_t + (E_k)_{rot} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 \tag{7.1.27}$$

7.2 Problemski zadaci

Problem 7.2.1 *Odredi prirodu centripetalnih sila za sljedeće primjere rotacijskog gibanja:*

a) Tijelo mase m, privezano užetom, vrti se rukom po kružnici.

b) Automobi se giba po kružnoj putanji.

c) Satelit se giba po kružnoj putanji oko Zemlje.

Odgovor:

a) Molekularna sila užeta i ruke.

b) Sila trenja između gume i puta.

c) Gravitacijska sila Zemlje.

Problem 7.2.2 *Objasni sljedeću pojavu: Sportski automobil ulazi u zavoj polumjera r nekom brzinom v i počinje da klizi usljed pojave centrifugalne sile. Kako bi izbjegli iskliznuće sa puta, konstruktori su odlučili da na toj stazi postave podlogu puta pod određenim kutom α. Poslije ove prepravke automobil može ući sa istom brzinom v, iako je zavoj istog polumjera, a da ne dođe do isliznuća automobila.*

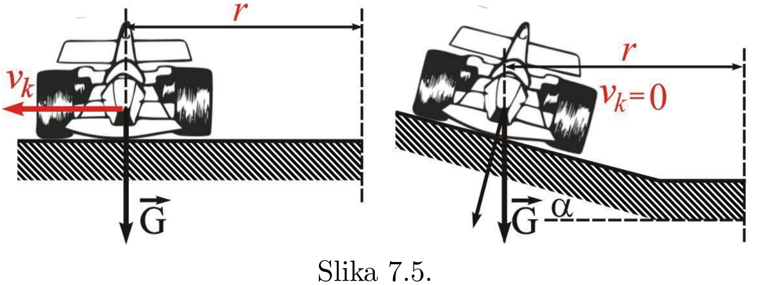
a) Je li došlo do promjene centrifugalne sile u drugom slučaju?

b) Zašto je automobil u prvom slučaju skrenuo sa staze?

c) Zašto u drugom slučaju nije došlo do iskliznuća automobila?

d) Kako bi se problem mogao riješiti na drugi način?

Odgovor:



Slika 7.5.

a) Centripfugalna sila se nije promijenila $F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$, jer su masa, obodna brzina i polumjer zakrivljenosti zavoja ostali isti u oba slučaja.

b) Automobil je skrenuo sa staze jer je $F_{cf} > F_{cp}$, gdje je centripetalna sila zapravo sila trenja između točkova automobila i puta $F_{cp} = F_{tr}$.

c) U drugom slučaju nije došlo do iskliznuća jer se povećala sila trenja, odnosno centripetalna sila.

$$F_{cp} = F_{tr} = \mu \cdot N$$

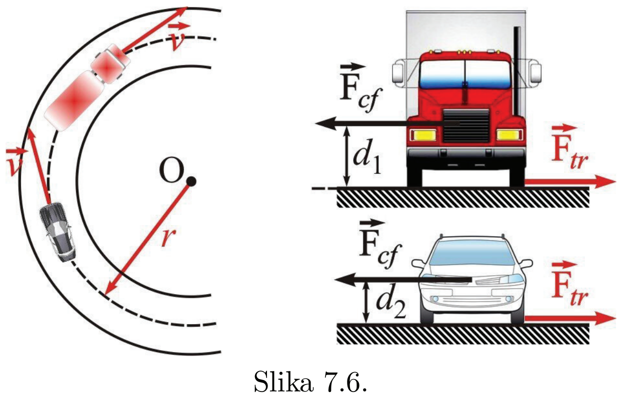
gdje je

$$N = mg + F_{cp}$$

tako da je zadovoljen uvjet $F_{cp} \geq F_{cf}$.

Problem 7.2.3 *Putnički automobil mase m i teretni automobil mase M ($m \ll M$), ulaze u zavoj polumjera r, nekom brzinom v (slika 7.6.). Ako pretpostavimo da je koeficijent trenja putničkog i teretnog automobila jednak, kako će se odnositi kritična brzina iskliznuća v_i i kako će se odnositi kritična brzina prevrtanja v_p? Objasni odgovor.*

Odgovor:



Slika 7.6.

Kritična brzina iskliznuća putničkog automobila je jednaka kritičnoj brzini iskliznuća teretnog automobila, jer je ona određena jednadžbom koja ne ovisi o masi

$$\frac{m \cdot v_i^2}{r} \geq \mu m g \Longrightarrow v_i^2 \geq \mu g r$$

Kritična brzina prevrtanja putničkog automobila je manja od kritične brzine prevrtanja teretnog automobila, jer je težište putničkog automobila niže od težišta teretnog, što znači da će obrtni moment koji prevrće vozilo, biti kod putničkog automobila manji.

$$\begin{aligned} M_1 &= F_{cf_1} \cdot d_1 \\ M_2 &= F_{cf_2} \cdot d_2 \\ d_1 &> d_2 \end{aligned}$$

Problem 7.2.4 *Poznato je da centripetalna i centrifugalna sila imaju isti intezitet, kod kružnog gibanja $F_{cf} = F_{cp}$. Je li uvijek zadovoljen vektorski uvjet $\overrightarrow{F}_{cf} = -\overrightarrow{F}_{cp}$. Kako bi odgovorili na ovo pitanje, razmatrajte gibanje automobila po kružnoj stazi i gibanje satelita oko planeta.*

Odgovor:

Nije uvijek zadovoljen uvjet, jer napadna točka, odnosno napadni pravac te dvije sile nije isti, kao što je to u prvom slučaju, mada može biti isti kao što je to u drugom slučaju, gdje napadna točka obje sile pada u težište satelita.

Problem 7.2.5 *Koja gibanja definiraju sljedeće relacije:*

a) $\overrightarrow{M} = 0$,

b) $\overrightarrow{M} \neq const.$,

c) $\overrightarrow{M} = const.$.

Odgovor:

a) Jednoliko rotacijsko gibanje.

b) Nejednoliko promjenjivo rotacijsko gibanje.

c) Jednoliko promjenjivo rotacijsko gibanje.

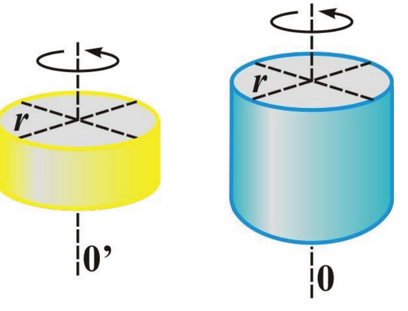
Problem 7.2.6 *Dva valjka istih masa* ($m_1 = m_2$) *i istih baza, rotiraju oko osi koja prolazi kroz središte valjka (slika 7.7.). Kako se odnose momenti inercije (tromosti) ta dva valjka? Objasnite odgovor.*

Odgovor:

Moment inercije valjaka je isti i njegov intezitet je jednak

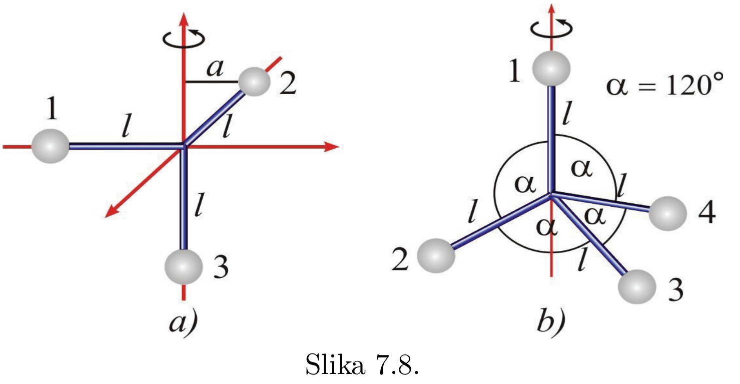
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mr^2$$

Odavde slijedi da veličina tijela duž osi rotacije ne doprinosi momentu inercije (uz konstantne mase), odnosno izraz za moment inercije valjka ne sadržava fizikalnu veličinu duljine valjka.



Slika 7.7.

Problem 7.2.7 *Sustav rotira kutnom brzinom oko zadane osi. Koliki je ukupni moment inercije ako pretpostavimo da kugle imaju zanemarive polumjere (slika 7.8.)?*



Slika 7.8.

Odgovor:

Ukupni moment inercije za slučaj pod 7.8.a) jednak je algebarskom zbroju sva tri momenta inercije za pojedine kugle

$$\begin{aligned} I_1 &= m \cdot (l)^2 = m \cdot l^2 \\ I_2 &= m \cdot a^2 = m \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{2} \\ I_3 &= m \cdot (0)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = m \cdot l^2 + \frac{m \cdot l^2}{2} + 0 = \frac{3}{2} \cdot m \cdot l^2$$

dok je u slučaju b) ukupni moment jednak algebarskom zbroju sva četiri momenta inercije pojedinih kugli

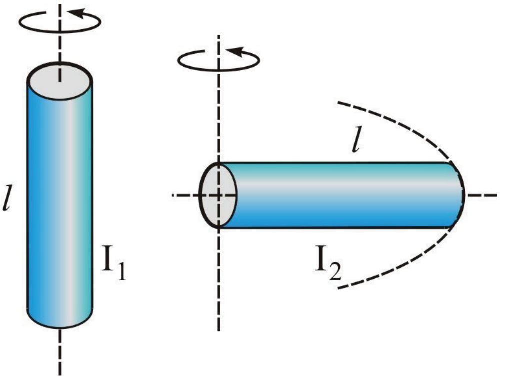
$$\begin{aligned} I_1 &= m \cdot (0)^2 = 0 \\ I_2 &= I_3 = I_4 = m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot m \cdot l^2 \end{aligned}$$

pa je ukupni moment jednak

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_1 + 3 \cdot I_2 \\ &= \frac{9}{4} \cdot m \cdot l^2 \end{aligned}$$

Problem 7.2.8 *Šipka mase m, zanemarljive debljine i duljine l rotira. Kada će šipka imati maksimalan, a kada minimalan moment inercije?*

Odgovor:

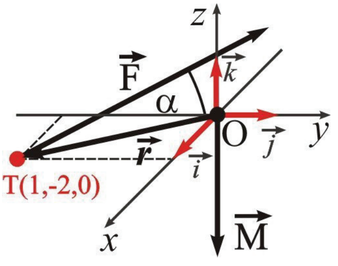


Slika 7.9.

Moment inercije šipke je minimalan kada je os rotacije koaksijalna os šipke, jer je tada $r = 0$, a maksimalan je kada se jedan kraj šipke okomito veže za os rotacije.

7.3 Primjeri

Primjer 7.3.1 *Izračunajte rezultantni moment sile s obzirom na točku ishodišta koordinatnog sustava, ako sila* $\overrightarrow{F} = \left(-3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}\right)$ N *djeluje u točki* $T\,(1\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$*.*



Slika 7.10.

Rješenje:

Moment sile jednak je vektorskom umnošku vektora $\overrightarrow{r}$ koji je definiran tako da je početna točka vektora točka u odnosu na koju se računa moment sile, a krajnja točka ona u kojoj sila djeluje, tada je moment sile jednak

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

Kako je vektor položaja točke $T\,(T_x, T_y, T_z)$ s obzirom na točku ishodišta $O\,(0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ jednak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_{OT} &= \overrightarrow{OT} = \left[(T_x - O_x)\,\overrightarrow{i} + (T_y - O_y)\,\overrightarrow{j} + (T_z - O_z)\,\overrightarrow{k}\right] \\
&= \left[(1\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\overrightarrow{i} + (-2\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\overrightarrow{j} + (0\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\,\overrightarrow{k}\right] \\
&= \left(\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}\right)\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

to je moment sile s obzirom na ishodište jednak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_O &= \overrightarrow{r}_{OT} \times \overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}\right)\ \mathrm{m} \times \left(-3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}\right)\ \mathrm{N} \\
&= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}\ \mathrm{N\,m} = -4\,\overrightarrow{k}\ \mathrm{N\,m}
\end{aligned}$$

Moment sile je okomit na x, y ravninu i djeluje u pozitivnome smjeru osi z.

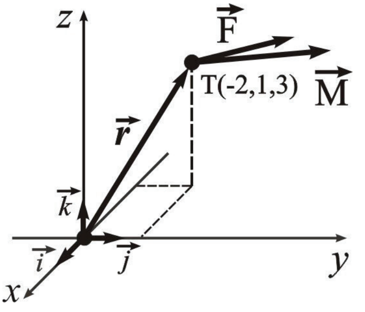
Primjer 7.3.2 *Izračunajte rezultantni moment sile s obzirom na točku ishodišta (slika 7.11.) ako sila* $\overrightarrow{F} = \left(3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$ N *djeluje u točki* $T\,(-2\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$*. Koliki bi bio rezultantni moment sile s obzirom na točku* $R\,(-1\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}, -2\,\mathrm{m})$*?*

Rješenje:
Rezultantni moment sile jednak je

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Kako je vektor položaja točke T s obzirom na točku ishodišta $O = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ jednak

$$\vec{r}_{OT} = \overrightarrow{OT} = \left(-2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m}$$



Slika 7.11.

to je moment sile s obzirom na ishodište jednak

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{r}_{OT} \times \vec{F} = \left(-2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m} \times \left(3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}\right)\,\mathrm{N} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\,\mathrm{N\,m} = \left(7\,\vec{i} + 11\,\vec{j} + \vec{k}\right)\,\mathrm{N\,m}
\end{aligned}$$

Vektor djelovanja sile u odnosu na točku R jednak je

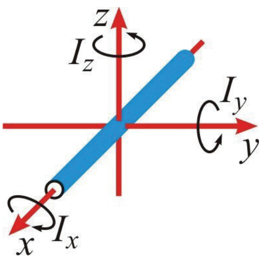
$$\begin{aligned}
\vec{r}_{RT} &= \overrightarrow{RT} = \left[(R_x - T_x)\,\vec{i} + (R_y - T_y)\,\vec{j} + (R_z - T_z)\,\vec{k}\right] \\
&= \left\{[-1 - (-2)]\,\vec{i} + (2 - 1)\,\vec{j} + (-2 - 3)\,\vec{k}\right\}\,\mathrm{m} \\
&= \left(\vec{i} + \vec{j} - 5\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

pa je rezultantni moment sile s obzirom na točku R

$$\begin{aligned}
\vec{M}_R &= \vec{r}_{RT} \times \vec{F} = \left(\vec{i} + \vec{j} - 5\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m} \times \left(3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}\right)\,\mathrm{N} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\,\mathrm{N\,m} = \left(-9\,\vec{i} - 16\,\vec{j} - 5\,\vec{k}\right)\,\mathrm{N\,m}
\end{aligned}$$

Primjer 7.3.3 *Odredite moment tromosti obzirom na os koja prolazi centrom mase i okomita je na koaksijalnu os tankog homogenog štapa duljine l (slika 7.12.).*

Rješenje:



Slika 7.12.

Pretpostavimo da tanki homogeni štap ima konstantan poprečni presjek. Poprečne dimenzije s obzirom na duljinu štapa l su vrlo male. Neka su y i z osi okomite na duljinu štapa, a koaksijalna os neka je os x. Tada elementarnu masu možemo prikazati kao

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l}$$

pa slijedi

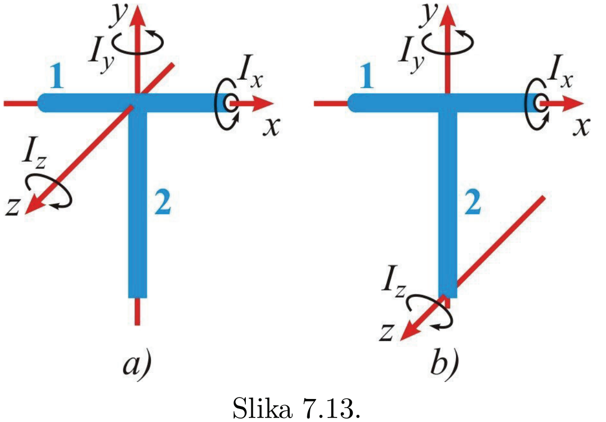
$$I_y = I_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l}\left[\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{ml^2}{12}$$

Moment tromosti s obzirom na koaksijalnu os x zbog zanemarivih dimenzija debljine štapa jednaka je

$$I_x = 0$$

Primjer 7.3.4 *Dva homogena aluminijska štapa spojena su okomito tako da tvore slovo T (slika 7.13.). Odredite moment tromosti sustava u odnosu na os koja je okomita na ravninu slova, a prolazi kroz točku spajanja dva štapa i u odnosu na točku koja prolazi kroz dno slova T, ako je duljina štapova* $l = 0.2\,\mathrm{m}$ *i masa* $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. *Odredite moment tromosti u odnosu na os koja prolazi kroz štapove, pretpostavivši da su štapovi kružnog poprečnog presjeka.*

Rješenje:



Slika 7.13.

Neka je štap 1 horizontalan, a štap 2 vertikalan. Moment tromosti u odnosu na točku spajanja dva štapa (slika 7.13.a), koristeći Steinerov poučak, iznosi

$$\begin{aligned} I_z &= I_1 + I_2 = \left(\frac{ml^2}{12}\right) + \left[\frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{5ml^2}{12} \\ &= \frac{5 \cdot 0.5\,\mathrm{kg} \cdot (0.2\,\mathrm{m})^2}{12} = \frac{25}{3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

U odnosu na točku dna slova (slika 7.13.b) imamo

$$\begin{aligned} I_z &= I_1 + I_2 = \left[\frac{ml^2}{12} + ml^2\right] + \left[\frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{17ml^2}{12} \\ &= \frac{17 \cdot 0.5\,\mathrm{kg} \cdot (0.2\,\mathrm{m})^2}{12} = \frac{85}{3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

uočimo da je u oba slučaja moment tromosti štapa I_2 jednak. Ako osi prolaze kroz štapove, moramo izračunati moment tromosti za štapove (koji su u odnosu na koaksijalnu os homogeni valjci). Polumjer štapa dobivamo iz

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V = \rho \cdot l \cdot r^2 \pi \\ r &= \sqrt{\frac{m}{\rho l \pi}} = \sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{kg}}{2700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0.2\,\mathrm{m} \cdot \pi}} = 1.72 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1.72\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

pa je moment tromosti štapa u odnosu na koaksijanu os jednaka

$$I_x = \frac{mr^2}{2} = \frac{0.5\,\mathrm{kg} \cdot \left(1.72 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}{2} = 7.37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Ako os prolazi koaksijalno štapu 1 imamo

$$\begin{aligned} I_x &= I_1 + I_2 = \left(\frac{mr^2}{2}\right) + \left[\frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] \\ &= 7.37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2} + \frac{20}{3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} = 6.74 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,kg} \end{aligned}$$

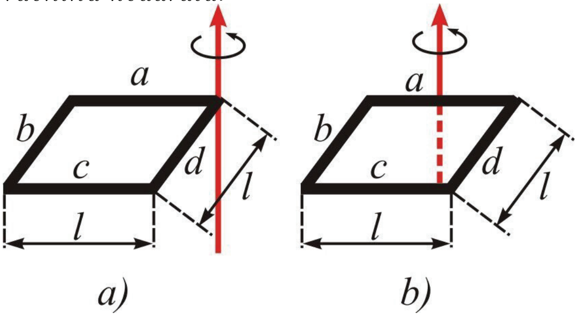
a ako os prolazi koaksijalno štapu 2

$$\begin{aligned} I_y &= I_1 + I_2 = \left(\frac{ml^2}{12}\right) + \left(\frac{mr^2}{2}\right) \\ &= \frac{5}{3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} + 7.37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2} = 1.74 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,kg} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.5 *Četiri homogena štapa masa* $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ *i duljine* $l = 0.5\,\mathrm{m}$ *spojena su u kvadrat (slika 7.14.). Izračunajte moment tromosti kvadrata:*

a) prema osi koja prolazi vrhom kvadrata i okomita je na ravninu kvadrata,

b) prema osi koja prolazi polovištem jedne stranice i okomita je na ravninu kvadrata.



Slika 7.14.

Rješenje:

a) Dvije stranice koje sadrže točku kojom prolazi os, imaju identičan položaj u odnosu na os, rotacija za kut $\frac{\pi}{4}$ pa imaju isti moment tromosti. Isto vrijedi i za dvije preostale stranice.

Koristeći Steinerov poučak imamo

$$\begin{aligned} I &= I_a + I_b + I_c + I_d = 2I_a + 2I_c \\ &= 2\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4}\right) + 2\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{5ml^2}{4}\right) \\ &= \frac{10}{3}ml^2 = \frac{10}{3} \cdot 0.5\,\mathrm{kg} \cdot (0.5\,\mathrm{m})^2 = 0.42\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

b) Sada stranice b i d imaju isti položaj pa vrijedi

$$\begin{aligned} I &= I_a + I_b + I_c + I_d = I_a + 2I_b + I_c \\ &= \frac{ml^2}{12} + 2\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{2}\right) + \left(\frac{ml^2}{12} + ml^2\right) \\ &= \frac{7ml^2}{3} = 0.29\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.6 *Odredite moment tromosti tankog prstena mase* $m = 10\,\mathrm{g}$, *polumjera* $r = 10\,\mathrm{cm}$ *oko tangente (slika 7.15.).*

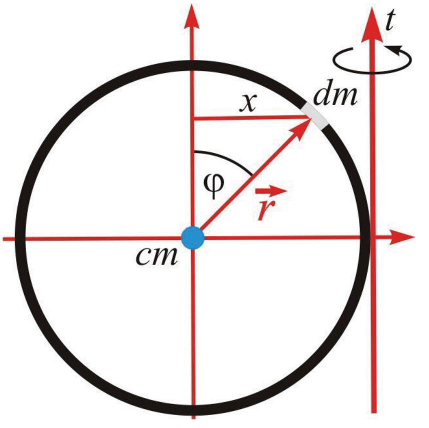
Rješenje:

Steinerov poučak daje

$$I = I_{CM} + mr^2$$

Moment tromosti u odnosu na centar mase prstena, koji leži u središtu kružnica koje definiraju prsten, iznosi

$$I_{CM} = \int_0^m x^2 dm$$



Slika 7.15.

Koristeći simetriju u odnosu na kvadrante
koordinatnog sustava i uvrštavajući izraze

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi \\ r &= const. \\ dm &= \frac{m}{2r\pi}dl = \frac{m}{2r\pi}rd\varphi = \frac{m}{2\pi}d\varphi \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \int_0^m x^2 dm = \int_0^{2\pi} r^2\sin^2\varphi \cdot \frac{m}{2\pi}d\varphi = \frac{mr^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi \\ &= \frac{mr^2}{2\pi}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{2mr^2}{\pi}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2mr^2}{\pi}\left[\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] = \frac{2mr^2}{\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{mr^2}{2} \end{aligned}$$

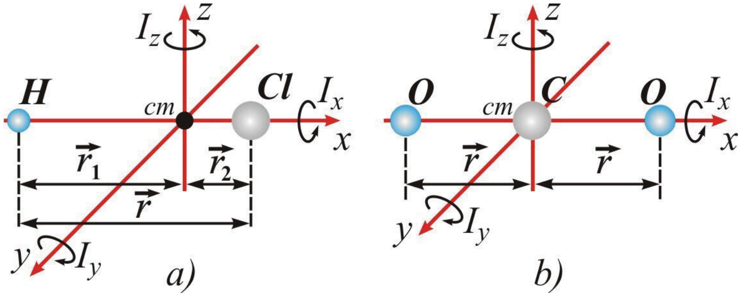
pa je

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2} \\ &= \frac{3\cdot 0.01\,\mathrm{kg}\cdot 0.1\,\mathrm{m}}{2} = 1.5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.7 *Izračunajte glavne momente tromosti molekula HCl i CO_2. Udaljenost atoma vodika i klora iznosi $r_{HCl} = 128\,\mathrm{pm}$, a udaljenost atoma ugljika u molekuli CO_2 od svakog atoma kisika iznosi $r_{CO_2} = 112\,\mathrm{pm}$ (slika 7.16.).*

Rješenje:

Za svako tijelo postoje najmanje tri međusobno okomite osi rotacije koje nazivamo glavnim osima inercije. Za njih vrijedi da je ukupni moment količine gibanja $\overrightarrow{L} = I \cdot \overrightarrow{\omega}$, odnosno $\overrightarrow{L}$, paralelan osi rotacije. Odgovarajuće momente nazivamo I_x, I_y, I_z. Obično se kao ishodište uzima centar mase sustava. Ako postoji os simetrije, tada je to glavna os, a ostale dvije su bilo koje osi okomite na nju.



Slika 7.16.

Atome zamislimo kao materijalne točke mase m udaljene za r. Moment tromosti sustava dviju materijalnih točaka je, npr. za HCl (i druge dvoatomne molekule):

$$I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

gdje su r_1, r_2 udaljenosti materijalnih točaka od centra mase, a z - je os okomita na spojnicu atoma koja prolazi središtem mase. Budući da je ishodište u centru mase, možemo pisati

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = 0 \implies m_1 r_1 = -m_2 r_2$$

odnosno po iznosu $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Iz ovog uvjeta i jednadžbe

$$r_1 + r_2 = r$$

dobivamo

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

pa je

$$I_z = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

Kako je npr. os y okomita ma os z i ima isti položaj u odnosu na atome to vrijedi, uz uvrštavanje podataka za molekulu HCl

$$\begin{aligned} I_y &= I_z = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = 2.6 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{kg\,m^2} \\ I_x &= 0\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

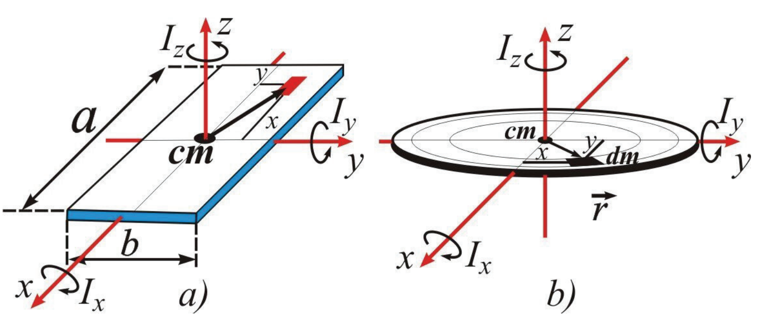
Moment tromosti s obzirom na os x koja prolazi kroz atome jednak je nuli. Centar mase molekule CO_2 nalazi se u atomu ugljika pa je moment tromosti te molekule još jednostavnije pronaći. I tu je $I_x = 0\,\mathrm{kg\,m^2}$, dok je

$$\begin{aligned} I_y &= I_z = 2m_O \cdot r^2 = 2 \cdot 2.66 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot \left(1.12 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\right)^2 \\ &= 6.7 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.8 *Izračunajte glavne momente tromosti:*

a) tanke pravokutne ploče dimenzija $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 1\,\mathrm{cm}$, mase $m = 4\,\mathrm{g}$ s obzirom na glavne osi koje prolaze kroz centar mase (slika 7.17.a),

b) tanke okrugle ploče polumjera $R = 2\,\mathrm{cm}$ i mase $m = 4\,\mathrm{g}$ (slika 7.17.b).



Slika 7.17.

Rješenje:

a) Glavne osi simetrije x i y jesu osi simetrije ploče, a os z okomita je na ploču. Centar mase je u središtu ploče. Moment tromosti s obzirom na os x koja prolazi kroz centar mase i paralelna je sa stranicom a uz relaciju

$$\frac{dm}{m} = \frac{dy}{b} \implies dm = \frac{m}{b}dy$$

iznosi:

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dm = \frac{m}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{m}{b}\left(\frac{y^3}{3}\right)_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{mb^2}{12} = 0.3\,\mathrm{g\,cm^2}$$

Slično i za os y

$$I_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dm = \frac{m}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dy = \frac{m}{a}\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{ma^2}{12} = 5.3\,\mathrm{g\,cm^2}$$

Moment tromosti s obzirom na os z okomitu na ploču iznosi

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm \\ I_z &= I_x + I_y = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right) = 5.6\,\mathrm{g\,cm^2} \end{aligned}$$

b) Okrugla ploča: Moment tromosti s obzirom na os z okomito na ploču uz relaciju

$$m = S\sigma = R^2\pi\sigma = r^2\pi\sigma \implies dm = 2r\pi\sigma dr$$

iznosi

$$\begin{aligned} I_z &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int r^2 dm = \int r^2 \cdot 2r\pi\sigma dr = 2\pi\sigma\int_0^R r^3 dr \\ &= 2\pi\sigma\frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}R^2\pi\sigma \cdot R^2 = \frac{1}{2}mR^2 = 8\,\mathrm{g\,cm^2} \end{aligned}$$

gdje je σ - površinska gustoća ploče. Zbog simetrije su momenti tromosti s obzirom na osi x i y jednake i iznose:

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dm; \quad I_y = \int x^2 dm \\ I_x + I_y &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = I_z \\ I_x &= I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} mR^2 = \frac{1}{4} \cdot 4\,\mathrm{g} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{g}\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Primjer 7.3.9 *Izračunajte moment tromosti homogenog paralelopipeda s obzirom na osi koje prolaze središtem mase i okomite su na stranice paralelopipeda, a zatim moment tromosti homogene kocke s obzirom na osi koje prolaze kroz središte mase i okomite su na stranice kocke.*

Rješenje:

Neka paralelopiped ima stranice a, b, c. Postavimo koordinatni sustav tako da ishodište bude u centru mase paralelopipeda, os $x-$ neka je paralelna bridu a, os $y-$ paralelna bridu b i os $z-$ paralelna bridu c. Označimo stranicu okomitu na os x sa $D = bc$. Poznavajući polarni moment tromosti pravokutnika (moment tromosti pravokutnika s obzirom na os okomitu na površinu) $I_0^x = \frac{D}{12}\left(b^2 + c^2\right) = konst.$, slijedi

$$\begin{aligned} I_x &= \int\limits_m r^2 dm = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho \cdot I_0^x \cdot dx = \rho \cdot \frac{D}{12}\left(b^2 + c^2\right) \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \\ &= \frac{\rho D}{12}\left(b^2 + c^2\right)(x) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\rho D}{12}\left(b^2 + c^2\right) \cdot a = \frac{m}{12}\left(b^2 + c^2\right) \end{aligned}$$

jer je $m = \rho V = \rho abc = \rho D \cdot a$. Analogno dobivamo i za ostale dvije osi

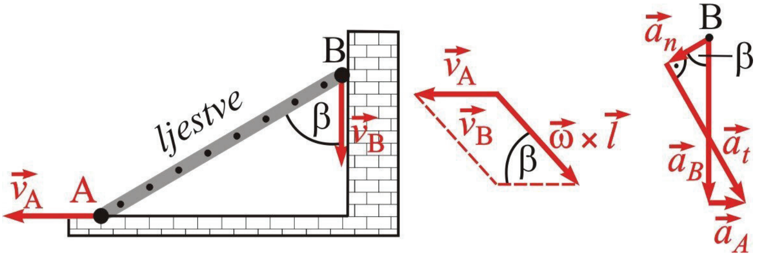
$$\begin{aligned} I_y &= \frac{m}{12}\left(a^2 + c^2\right) \\ I_z &= \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right) \end{aligned}$$

Za homogenu kocku vrijedi $a = b = c$ pa imamo

$$I_x = I_y = I_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + a^2\right) = \frac{1}{6} ma^2$$

Primjer 7.3.10 *Ljestve dužine $l = 2.5\,\mathrm{m}$ dodiruju u točki B vertikalni zid pod kutom β, a pod u točki A. Klize li ljestve tako da se kut β povećava i ako je brzina i akceleracija točke A, $v_A = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $a_A = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ u vodoravnom smjeru za $\beta = 60°$, kolika je brzina točke B? Kolika je kutna brzina i kutna akceleracija ljestava u tom trenutku?*

Rješenje:



Slika 7.18.

Općenita rotacija krutog tijela može se rastaviti na zbroj translacije i rotacije oko nepomične osi. Ako se gibanje ljestava zamisli kao zbroj translacije brzine $\vec{v}_A$ i rotacije oko nepomične točke A, tada je brzina točke B jednaka vektorskom zbroju translacijske brzine $\vec{v}_A$ i obodne brzine pri kruženju po kružnici polumjera

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{l}$$

Obodna brzina $\vec{v}\,' = \vec{\omega} \times \vec{l}$ po iznosu jednaka $v' = \omega l$, a okomita je na ljestve u točki B. Iz trokuta brzina (slika 7.18.) slijedi

$$v_A = \omega l \cos\beta$$

odnosno

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v_A}{l\cos\beta} = \frac{0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2.5\,\mathrm{m}\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = 0.4\,\mathrm{s}^{-1}\\ v_B &= v_A\tan\beta = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\tan\frac{\pi}{3} = 0.87\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Slično se određuje i akceleracija

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}\,'$$

gdje je $\vec{a}'$ akceleracija točke B pri rotaciji oko točke A. Ta je akceleracija vektorski zbroj radijalne $\vec{a}_n$ i tangencijalne $\vec{a}_t$ akceleracije.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} \Longrightarrow a_t = l\alpha \\
\vec{a}_n &= \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
a_n &= \omega^2 l = \left(0.4\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot 2.5\,\mathrm{m} = 0.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

Iz poligona akceleracija dobiva se

$$\begin{aligned}
a_B &= \frac{a_n}{\cos\beta} + a_A \cot(90-\beta) = \frac{a_n}{\cos\frac{\pi}{3}} + a_A \cot\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{0.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos\frac{\pi}{3}} + 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cot\frac{\pi}{6} = 2.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
a_t &= a_n \tan\beta + \frac{a_A}{\sin(90-\beta)} \\
&= 0.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\tan\frac{\pi}{3} + \frac{1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2.69\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
\alpha &= \frac{a_t}{l} = \frac{2.69\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2.5\,\mathrm{m}} = 1.08\,\mathrm{s}^{-2}
\end{aligned}$$

Primjer 7.3.11 *Preko kolotura u obliku diska mase* $m = 0.5$ kg *i polumjera* $R = 0.1$ m *prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi masa* $m_1 = 0.25$ kg *i* $m_2 = 0.45$ kg *(slika 7.19.). Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Masu žice i trenje u osovini koloture zanemarite.*

Rješenje:

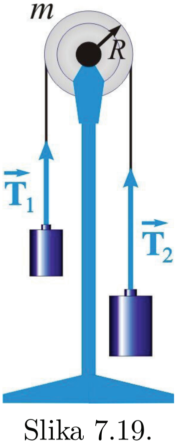
Pretpostavimo gibanja tijela u smjeru padanja tijela mase m_2 i pridodajmo mu pozitivan predznak. Tada II. Newtonov zakon primijenjen na sustav daje, za tijelo mase m_1:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \tag{7.3.1}$$

za tijelo mase m_2:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \tag{7.3.2}$$

i koloturu, na koju djeluje moment sile $M = (T_2 - T_1)\,R$ i pri tome mu daje kutnu akceleraciju



Slika 7.19.

$\alpha = \frac{a}{R}$:

$$\begin{aligned}(T_2 - T_1) R &= I\alpha = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} \\ T_2 - T_1 &= \frac{1}{2} m a \qquad (7.3.3)\end{aligned}$$

Zbrojimo li jednadžbe (7.3.1) i (7.3.2) dobivamo

$$(T_1 - T_2) = (m_1 - m_2) g + (m_1 + m_2) a$$

što uvršteno u jednadžbu (7.3.3) daje akceleraciju utega

$$\begin{aligned}a &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \\ &= \frac{0.45\,\mathrm{kg} - 0.25\,\mathrm{kg}}{0.25\,\mathrm{kg} + 0.45\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 2.0653 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Napetost niti T_1 dobijemo uvrštavajući akceleraciju u jednadžbu (7.3.1), a T_2 u (7.3.2)

$$\begin{aligned}T_1 &= m_1 a + m_1 g = m_1 (a + g) = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g + g \right) \\ &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} + 1 \right) m_1 g = \frac{2 m_2 + \frac{1}{2} m}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} \cdot m_1 g \\ &= \frac{2 \cdot 0.45\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}}{0.25\,\mathrm{kg} + 0.45\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}} \cdot 0.25\,\mathrm{kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 2.968\,8\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

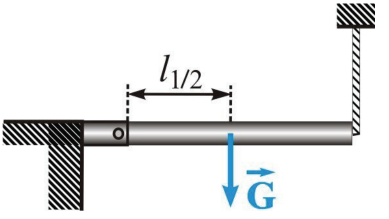
$$\begin{aligned}T_2 &= m_2 (g - a) = m_2 \left(g - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g \right) \\ &= \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} \right) m_2 g = \frac{2 m_1 + \frac{1}{2} m}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} \cdot m_2 g \\ &= \frac{2 \cdot 0.25\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}}{0.25\,\mathrm{kg} + 0.45\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}} \cdot 0.45\,\mathrm{kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 3.485\,1\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Primjer 7.3.12 *Tanki štap je jednim krajem uzglobljen na rub čvrste horizontalne podloge (slika 7.20.), a drugim je krajem obješen o tanki konac. Štap je u vodoravnom položaju i miruje u trenutku kada dođe do kidanja konca. Izračunajte ubrzanje centra mase štapa ako je duljina štapa* $l = 5\,\mathrm{m}$.

Rješenje:

Kidanjem konca dolazi do rotacije štapa (centra mase), oko uzgobljenog kraja.

Moment vrtnje ujednačen je sa momentom sile koja djeluje u centru mase štapa zbog njegove težine.



Slika 7.20.

$$I\alpha = \frac{mgl}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{mgl}{2I}$$

Moment tromosti štapa s obzirom na os rotacije, po Steinerovu poučku, jednak je

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{ml^2}{3} \end{aligned}$$

pa je kutno ubrzanje α jednako

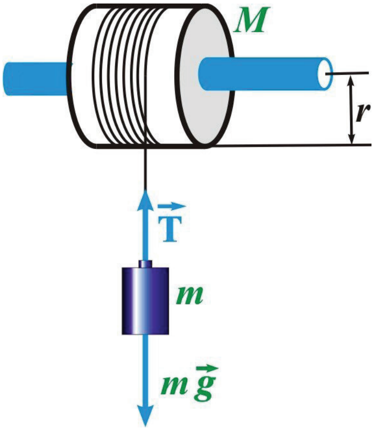
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{mgl}{2I} = \frac{mgl}{2 \cdot \frac{ml^2}{3}} = \frac{3g}{2l} \\ &= \frac{3 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 5\,\mathrm{m}} = 2.943\,\mathrm{s}^{-2} \end{aligned}$$

odnosno ubrzanje centra mase

$$\begin{aligned} a &= r\alpha = \frac{l}{2} \cdot \frac{3g}{2l} = \frac{3g}{4} \\ &= \frac{3 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4} = 7.357\,5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.13 *Oko horizontalnog valjka mase* $M = 12\,\mathrm{kg}$ *i promjera* $d = 20\,\mathrm{cm}$ *obavijeno je uže o čijem kraju visi utag mase* $m = 5\,\mathrm{kg}$ *na visini* $h = 4\,\mathrm{m}$ *iznad tla. Pri spuštanju utega valjak se rotira oko svoje* *koaksijalne osi (slika 7.21.). Izračunajte brzinu kojom će uteg pasti na tlo i kinetičku energiju cijelog sustava u trenutku pada utega na tlo. Moment tromosti valjka iznosi $I = \frac{1}{2}Mr^2$.*

Rješenje:



Slika 7.21.

U početnom trenutku vremena uteg se ne giba translatorno niti valjak rotira oko svoje osi, tako da je ukupna energija sustava samo potencijalna energija utega

$$E_{uk} = mgh$$

Ta se potencijalna energija pretvara u translacijsku energiju gibanja utega i rotacijsku energiju vrtnja valjka. Pri udaru utega u tlo sva potencijalna energija prelazi u kinetičku pa imamo

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Translatorna brzina povezana je sa kružnom brzinom rotacije preko

$$v = \omega r = \omega\frac{d}{2} \Longrightarrow \omega = \frac{2v}{d}$$

pa je

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{2v}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M\frac{d^2}{4}\right)\frac{4v^2}{d^2} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{1}{4}\left(2m+M\right)v^2 \end{aligned}$$

odavdje je brzina pada utega na tlo jednaka

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\,\mathrm{m}}{2 \cdot 5\,\mathrm{kg} + 12\,\mathrm{kg}}} = 5.\,972\,7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ukupna kinetička energija jednaka je

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}\left(2m+M\right)v^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2 \cdot 5\,\mathrm{kg} + 12\,\mathrm{kg}\right)\left(5.\,972\,7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 196.\,2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

što smo mogli dobiti i kao potencijalnu energiju utega u početnom trenutku vremena

$$E_p = mgh = 5\,\text{kg} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\,\text{m} = 196.2\,\text{J}$$

Primjer 7.3.14 *Homogeni štap mase $m_1 = 500\,\text{g}$ pričvršćen je u vodoravnom položaju kroz vertikalnu os kroz centar mase oko koje može rotirati. Kuglica mase $m = 10\,\text{g}$ dolijeće u vodoravnoj ravnini i udara brzinom $v = 500\frac{\text{m}}{\text{s}}$ u štap pod kutom $\alpha = 45^\circ$ na $\frac{1}{4}$ duljine od kraja i ostaje u štapu. Kolika je toplina razvijena pri sudaru?*

Rješenje:
Budući da je

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$$

odnosno

$$L = rp\sin\alpha = \frac{l}{4} \cdot mv\sin\alpha = I\omega$$

i po Steinerovu poučku

$$I = I_{CM} + md^2 = I_{CM} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{m_1 l^2}{12} + \frac{ml^2}{16}$$

dobiva se iz

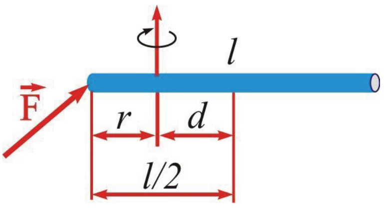
$$\frac{mv^2}{2} = Q + \frac{I\omega^2}{2} = Q + \frac{L^2}{2I}$$

razvijena toplina

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{mv^2}{2} - \frac{L^2}{2I} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\left(\frac{l}{4} \cdot mv\sin\alpha\right)^2}{2\left(\frac{m_1 l^2}{12} + \frac{ml^2}{16}\right)} \\
&= \frac{mv^2}{2} - \frac{\frac{l^2 m^2 v^2 \sin^2\alpha}{16}}{2\frac{4m_1 l^2 + 3ml^2}{48}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2}\left[\frac{\left(3m\sin^2\alpha\right) l^2}{\left(4m_1 + 3m\right) l^2}\right] \\
&= \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{3m\sin^2\alpha}{4m_1 + 3m}\right) = 1241\,\text{J}
\end{aligned}$$

Primjer 7.3.15 *Homogeni štap duljine $l = 8\,\mathrm{m}$ i mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ može se zavrtjeti oko okomite osi koja prolazi točkom A udaljenom $r = \frac{l}{5}$ od jednog kraja štapa (slika 7.22.). Odredite kutno ubrzanja štapa, ako konstantna tangencijalna sila od $F = 200\,\mathrm{N}$ djeluje na kraj štapa bliži točki A. Koliki puta bi se promjenilo kutno ubrzanje da ista sila djeluje na drugi kraj štapa?*

Rješenje:



Slika 7.22.

Osnovni zakon rotacije krutog tijela daje

$$M_z = I_z \cdot \alpha_1 = r \cdot F = \frac{l \cdot F}{5}$$

gdje je d udaljenost stvarne osi rotacije od osi centra mase štapa.

$$d = \frac{l}{2} - r = \frac{l}{2} - \frac{l}{5} = \frac{3l}{10}$$

Moment tromosti štapa prema Steinerovu poučku iznosi

$$I_z = I_{cm} + m \cdot d^2 = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot \left(\frac{3l}{10}\right)^2 = \frac{13}{75} m \cdot l^2$$

pa je kutno ubrzanje jednako

$$\alpha_1 = \frac{M_z}{I_z} = \frac{\frac{l \cdot F}{5}}{\frac{13}{75} m \cdot l^2} = \frac{15}{13} \cdot \frac{F}{ml} = \frac{15}{13} \cdot \frac{200\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{kg} \cdot 8\,\mathrm{m}} = \frac{125}{13}\,\mathrm{s}^{-2} = 9.62\,\mathrm{s}^{-2}$$

U slučaju da sila djeluje na drugom kraju štapa, moment sile bi iznosio

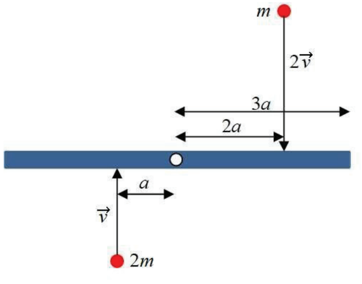
$$M_z' = (l - r) \cdot F = \frac{4}{5} l \cdot F = 4 M_z$$

dok je moment tromosti isti. Kutna akceleracija je

$$\alpha_2 = \frac{M_z'}{I_z} = \frac{4 M_z}{I_z} = 4 \cdot \alpha_1 = 4 \cdot 9.62\,\mathrm{s}^{-2} = 38.46\,\mathrm{s}^{-2}$$

Primjer 7.3.16 *Jednolika šipka duljine $6a$ i mase $8m$ leži na glatkom vodoravnom stolu. Dvije točkaste mase m i $2m$ koje se gibaju u istoj horizontalnoj ravnini brzinom $2v$, odnosno v, udare o šipku i zalijepe* *se za šipku (slika 7.23.). Šipka je postavljena u rotaciji. Pokažite da je*

(a) brzina centra mase $v_c = 0$
(b) kutni moment $L = 6mva$
(c) kutna brzina $\omega = \frac{v}{5a}$
(d) rotacijska energija $E = \frac{3mv^2}{5}$



Slika 7.23.

Rješenje:

a) Početna količina gibanja sustava je

$$p = 2m \cdot v - m \cdot 2v = 0$$

pa u referentnom sustavu centar mase ovog susatva ima ukupnu brzinu 0 ($v_c = 0$).

b) Oba tijela u odnosu na središte šipke uzrokuju rotaciju u istom smjeru, stoga je ukupni moment količine gibanja jednak

$$L = 2m \cdot v \cdot a + m \cdot 2v \cdot 2a = 6mva$$

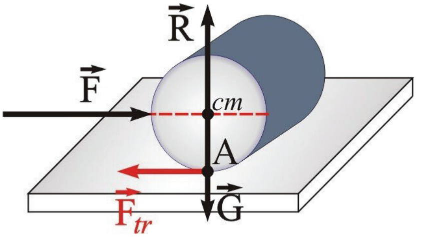
c) Kutna brzina dobiva se iz izraza za kutnu količinu gibanja i jednaka je

$$\begin{aligned} L &= I\omega \\ 6mva &= \left[\frac{1}{12}(8m)(6a)^2 + 2ma^2 + m\left(2a^2\right)\right]\omega = 30ma^2 \cdot \omega \\ \omega &= \frac{6mva}{30ma^2} = \frac{v}{5a} \end{aligned}$$

d) Kinetička energija rotacije jednaka je

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 30ma^2 \cdot \left(\frac{v}{5a}\right)^2 = \frac{3}{5}mv^2$$

Primjer 7.3.17 *Na valjak mase* $m = 10\,\mathrm{kg}$ *djeluje stalna horizontalna sila* $F = 50\,\mathrm{N}$*, tako da se valjak kotrlja po horizontalnoj podlozi (slika 7.24.). Kolikom akceleracijom se giba centar mase (težište) valjka?*



Slika 7.24.

Rješenje:

Da bi se valjak kotrljao bez klizanja, mora postojati dovoljna sila trenja F_{tr} između valjka i podloge. Prilikom kotrljanja trenutna obodna brzina točke dodira (A) valjka i podloge je nula. Ako se valjak zarotira za kut φ, točka dodira A se pomakne na podlozi za $s_A = r \cdot \varphi$, gdje je r polumjer valjka. Isti toliki put mora prevaliti i centar mase (težište) valjka (da bi bio ispunjen uvjet da nema klizanja valjka). Odavde vrijedi

$$\begin{aligned} s_{CM} &= s_A = r\varphi \\ v_{CM} &= \frac{d}{dt}(s_{CM}) = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega \\ a_{CM} &= \frac{d}{dt}(v_{CM}) = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \end{aligned}$$

gdje su ω, α kutna brzina i akceleracija pri rotaciji centra mase valjka oko trenutne nepomične osi koja prolazi kroz točku A. Na valjak djeluju sile: težina valjka $\overrightarrow{G}$, horizontalna sila $\overrightarrow{F}$, sila trenja $\overrightarrow{F}_{tr}$ i reakcija podloge $\overrightarrow{R}$. Centar mase valjka giba se paralelno ravnini podloge pa mora vrijediti

$$\begin{aligned} \sum_i F_{y_i} &= R + G = 0 \\ \sum_i F_{x_i} &= F + F_{tr} = m \cdot a_{CM} \end{aligned}$$

ili napisano u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} m \cdot g &= R \\ m \cdot a_{CM} &= F - F_{tr} \end{aligned}$$

Ukupni moment sila u odnosu na točku A jednak je

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{A_i} = \sum_i \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i$$

ili skalarno

$$M_A = G \cdot 0 + R \cdot 0 + F_{tr} \cdot 0 + Fr = Fr$$

jer su momenti svi ostalih sila jednaki nuli (sile prolaze kroz točku A).

Iz jednadžbe rotacije $M_A = I_A \cdot \alpha$ dobivamo

$$\alpha = \frac{M_A}{I_A} = \frac{F \cdot r}{\frac{3}{2} m \cdot r^2} = \frac{2}{3} \frac{F}{m \cdot r}$$

gdje je moment tromosti s obzirom na točku A izračunat pomoću Steinerova poučka

$$I^A = I_{CM} + md^2 = I_{CM} + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

Veza između kutne akceleracije i akceleracije centra mase valjka daje

$$a_{CM} = r \cdot \alpha = r \cdot \frac{2}{3} \frac{F}{mr} = \frac{2F}{3m} = \frac{2 \cdot 50\,\mathrm{N}}{3 \cdot 10\,\mathrm{kg}} = \frac{10}{3} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3.33 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Da valjak klizi bez trenja, imao bi akceleraciju

$$a_k = \frac{F}{m} = \frac{50\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sila trenja jednaka je

$$F_{tr} = F - m \cdot a_{CM} = 50\,\mathrm{N} - 10\,\mathrm{kg} \cdot 3.33 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 16.67\,\mathrm{N}$$

ili

$$F_{tr} = F - ma_{CM} = F - \frac{2}{3} F = \frac{F}{3}$$

Da bi se valjak mogao kotrljati bez klizanja, koeficijent statičkog trenja između valjka i podloge mora zadovoljavati uvjet

$$F_{tr} \leq \mu R \Longrightarrow \frac{F}{3} \leq \mu mg \Longrightarrow \mu \geq \frac{F}{3mg} = \frac{50\,\mathrm{N}}{3 \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.17$$

Zadatak smo mogli riješiti i da smo jednadžbu rotacije postavili i za drugu os rotacije, npr. os rotacije koja prolazi kroz centar mase. Tada bi vrijedilo za ukupni moment sila

$$\sum_i M_{CM} = F_{tr} \cdot r = I_{CM} \cdot \alpha$$

dok bi jednadžbe za sile ostale iste

$$\begin{aligned} \sum_i F_{y_i} &= R + G = 0 \\ \sum_i F_{x_i} &= F + F_{tr} = m \cdot a_{CM} \end{aligned}$$

ili napisano u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} mg &= R \\ m \cdot a_{CM} &= F - F_{tr} \end{aligned}$$

koristeći odnos

$$\begin{aligned} F_{tr} \cdot r &= I_{CM} \cdot \alpha = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a_{CM}}{r} = \frac{1}{2}mr \cdot a_{CM} \\ F_{tr} &= \frac{1}{2}m \cdot a_{CM} \end{aligned}$$

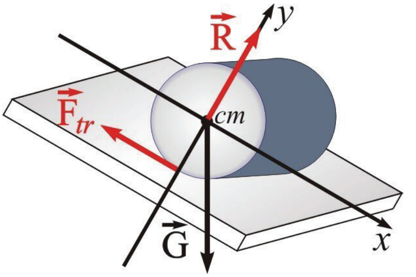
dobivamo naravno isti rezultat

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a_{CM} + F_{tr} = m \cdot a_{CM} + \frac{1}{2}m \cdot a_{CM} = \frac{3}{2}m \cdot a_{CM} \\ a_{CM} &= \frac{2F}{3m} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.18 *Puni valjak počne se kotrljati bez klizanja s vrha kosine visoke $h = 4\,\mathrm{m}$ koja zatvara kut $\beta = 30°$ s horizontalom. Kolika je brzina i akceleracija centra mase valjka na dnu kosine (slika 7.25.)? Kolika bi bila brzina kad bi valjak klizio bez trenja?*

Rješenje:

Zadatak ćemo prvo riješiti primjenom II. Newtonova zakona za translaciju centra mase i rotaciju valjka. Na valjak djeluje sila teže $\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{g}$, sila reakcije podloge $\overrightarrow{R}$ i sila trenja $\overrightarrow{F}_{tr}$. Rastavimo te sile na komponente tako da koordinatna os x bude paralelna niz kosinu, a os y okomita ud kosine. Tada su jednadžbe



Slika 7.25.

$$\sum_i F_{x_i} = mg\sin\beta - F_{tr} = ma$$
$$\sum_i F_{y_i} = R - mg\cos\beta = 0$$

Odakle za silu trenja dobivamo

$$F_{tr} = \mu R = \mu mg\cos\beta = mg\sin\beta - ma$$

Za rotaciju oko osi koja prolazi kroz centar mase momenti svih sila iščezavaju izuzev momenta sile trenja. Moment sile trenja s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase iznosi

$$M = F_{tr}\cdot r$$

pa jednadžba rotacije valjka glasi

$$M = F_{tr}\cdot r = I_{CM}\cdot\alpha = \frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r} = \frac{1}{2}mar$$

odakle dobivamo za silu trenja

$$F_{tr} = \frac{ma}{2} = mg\sin\beta - ma$$

odakle je ubrzanje

$$\frac{3}{2}ma = mg\sin\beta$$
$$a = \frac{2}{3}g\sin\beta = \frac{2}{3}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 30 = 3.\,27\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Iz izraza za konačnu brzinu pri prijeđenom putu s i ubrzanju a, bez početne brzine

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{2ah}{\sin\beta}}$$

dobivamo brzinu valjka na dnu kosine

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{2}{3} g \sin\beta \cdot h}{\sin\beta}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\,\mathrm{m}}{3}} = 7.23 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uspoređivanjem izraza za silu trenja imamo

$$F_{tr} = \mu mg\cos\beta = \frac{ma}{2} = \frac{m \cdot \frac{2}{3} g \sin\beta}{2} = \frac{mg\sin\beta}{3}$$

odakle za koeficijent trenja mora vrijediti

$$\mu \geq \frac{\frac{mg\sin\beta}{3}}{mg\cos\beta} = \frac{\tan\beta}{3} = 0.19$$

ako želimo dobiti čisto kotrljanje bez klizanja.

Zadatak možemo riješiti i pomoću zakona očuvanja energije. Na vrhu kosine prije početka gibanja kinetička energija E_{k_1} jednaka je nuli, a potencijalna energija jednaka je $E_{p_1} = mgh$ pa je ukupna energija jednaka

$$E_1 = E_{k_1} + E_{p_1} = mgh$$

Kako se valjak kotrlja niz kosinu, potencijalna energija se pretvara u kinetičku, tako da je na dnu kosine potencijalna energija nula, a kinetička jednaka mgh.

$$E_2 = E_{p_2} + E_{k_2} = E_{k_2}$$

(Kada se tijelo kotrlja bez klizanja, iako postoji sila trenja, ukupna energija ostaje očuvana, jer je sila trenja koja je paralelna podlozi uvijek okomita na pomak i zbog toga je njen rad jednak nuli).

Kinetička energija pri kotrljanju jednaka je zbroju kinetičke energije translacije centra mase i kinetičke energije rotacije tijela.

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2$$

Zakon očuvanja mehaničke energije daje

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM} \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

Budući da je moment tromosti valjka s obzirom na koaksijalnu os koja prolazi kroz centar mase valjka jednak $I_{CM} = \frac{1}{2}mr^2$, a za kotrljanje bez klizanja za obodnu brzinu vrijedi $v = v_{CM} = \omega r$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2$$

za brzinu centra mase valjka dobivamo

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 7.23\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Deriviranjem po vremenu izraza za kvadrat brzine

$$\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}gh\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}g\sin\beta \cdot s\right)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} 2v\frac{dv}{dt} &= \frac{4}{3}g\sin\beta\frac{d}{dt}(s) \\ 2v \cdot a &= \frac{4}{3}g\sin\beta \cdot v \\ a &= \frac{2}{3}g\sin\beta = 3.27\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

U slučaju da valjak klizi niz kosinu bez trenja, zakon očuvanja mehaničke energije daje

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

pa je brzina

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\,\mathrm{m}} = 8.858\,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

odnosno akceleracija

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{2gh}{2\frac{h}{\sin\beta}} = g\sin\beta = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin 30 = 4.905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Napomena: Kotrljanje tijela možemo u proizvoljnom trenutku vremena shvatiti kao rotaciju oko točke dodira A koja je stalno nepomična. Prema takvom gledištu, ukupna kinetička energija je kinetička energija rotacije oko osi koja prolazi kroz točku A i tangencijalna je na plašt valjka. Prema Steinerovom poučku moment tromosti valjka oko točke A jednak je

$$I_A = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

pa je kinetička energija jednaka

$$E_k = \frac{1}{2}I_A \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}mr^2 \cdot \omega^2 = \frac{3}{4}m\,(r\omega)^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

odnosno

$$mgh = \frac{3}{4}mv^2$$

odakle je opet

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 7.233\,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 7.3.19 *Bilijarska kugla mase* $m = 0,25$ kg *i polumjera* $r =$ 2 cm *miruje na vodoravnoj podlozi. Igrač vodoravno udara bilijarskim štapom, koji je usmjeren točno u središte kugle i ona dobije početnu brzinu* $v_0 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Koeficijent trenja između kugle i podloge iznosi* $\mu = 0,25$.

a) *koje vrijeme će proći kada će se kugla početi kotrljati bez klizanja?*

b) *koju će udaljenost prijeći za to vrijeme?*

c) *kinetičku energiju kugle neposredno nakon udara i u trenutku kada se počne kotrljati bez klizanja?*

Rješenje:

a) Da bi pronašli vrijeme kada se kugla samo kotrlja bez klizanja, mora vrijediti uvjet $v = \omega \cdot R$. Koristeći II. Newtonov zakon za translaciju tijela (kako se tijelo giba samo u horizontalnom pravcu, ne moramo razmatrati sile vektorski, nego skalarno) dobivamo:

$$\sum_i F_i^T = F_{tr} = -\mu mg = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g \text{ - usporenje zbog sile trenja pri translaciji}$$

jer sila teže je jednaka reakciji podloge. Koristimo i II. Newtonov zakon za rotaciju krutog tijela. Sila trenja uzrokuje moment u centru mase kugle

$$\begin{aligned} M_{CM} &= I \cdot \alpha = \frac{2}{5} mR^2 \alpha = F_{tr} \cdot R = \mu mgR \\ \alpha &= \frac{5\mu g}{2R} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{aligned}$$

Koristimo definicijske izraze za translacijsku i kutnu brzinu:

$$\begin{aligned} v &= \int_o^t a \cdot dt \\ \omega &= \int_0^t \alpha \cdot dt \end{aligned}$$

Pretpostavimo da u trenutku t_1 kugla počinje samo kotrljati. Tada mora vrijediti uvjet $v_1 = \omega_1 \cdot R$, gdje su v_1 obodna brzina (koja je jednaka translacijskoj, jer nema klizanja) i ω_1 kutna brzina kugle. Kako je u trenutku $t = 0$ s brzina jednaka v_0, a kutna brzina jednaka nuli (početni - rubni uvjeti) imamo:

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_0^{t_1} a \cdot dt = \int_0^{t_1} -\mu g \cdot dt = v_0 - \mu g t_1 \\ \omega_1 &= \int_0^{t_1} \alpha \cdot dt = \int_0^{t_1} \frac{5\mu g}{2R} \cdot dt = \underbrace{\omega_0}_{=0} + \frac{5\mu g}{2R} t_1 \end{aligned}$$

Iz uvjeta $v_1 = \omega_1 \cdot R$ slijedi

$$\begin{aligned} v_0 - \mu g t_1 &= \frac{5\mu g}{2R} t_1 \cdot R = \frac{5\mu g}{2} t_1 \\ t_1 &= \frac{2v_0}{7\mu g} \end{aligned}$$

b) Tijelo usporava deceleracijom a pa imamo:

$$\begin{aligned} s &= v_0t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = v_0\frac{2v_0}{7\mu g} + \frac{1}{2}(-\mu g)\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 \\ &= \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\frac{4v_0^2}{49\mu^2g^2} = \frac{12v_0^2}{49\mu g} \\ &= 9,9856 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Kinetička energija kugle neposredno nakon udara je

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,25\ kg \cdot \left(10\frac{m}{s}\right)^2 = 12,5 \text{ J}$$

Brzina u trenutku t_1 je

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 = v_0 - \mu g\frac{2v_0}{7\mu g} = \frac{5}{7}v_0$$

pa u trenutku kad se kugla počne kotrljati bez klizanja imamo kinetičku energiju translacije i rotacije (bez obzira što se više kugla ne kliže i dalje se centar mase giba translacijski)

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_1^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_1^2 \\ &= \frac{7}{10}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 = \frac{5}{7}E_{k0} = \frac{5}{7}\cdot 12,5 \text{ J} = 8,9285 \text{ J} \end{aligned}$$

Primjer 7.3.20 *Drvena greda dužine $l = 5\,\mathrm{m}$, postavljena je pored vertikalnog zida. Stojeći na vrhu zida čovjek gurne gredu početnom brzinom $v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko vremena je potrebno gredi da padne na tlo?*

Rješenje:

Pomoću zakona održanja mehaničke energije, greda ima kinetičku energiju

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mgl$$

gdje je $I = \frac{ml^2}{3}-$ moment tromosti grede u odnosu na os rotacije (dno grede), $\omega_0 = \frac{v_0}{l}-$ početna kutna brzina grede, $\omega-$ kutna brzina grede u trenutku pada na tlo. Na osnovu prethodne relacije brzina vrha grede u trenutku udara o tlo jednaka je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega^2 &= \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mgl \\ v &= \sqrt{v_0^2 + 3gl} \end{aligned}$$

Kutna brzina i kutni otklon grede poslije vremena t jednaki su:

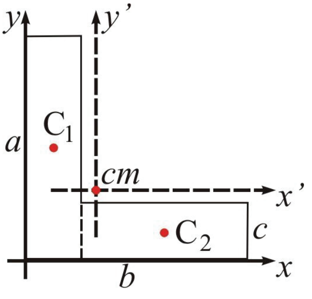
$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}$$

Kako vrh grede opiše kut od $\theta = \frac{\pi}{2}$, vrijeme padanja je

$$t = \frac{\pi}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 3gl}}$$

7.4 Zadatci

Problem 7.4.1 *Izračunajte moment tromosti kutnika stranica* $a = b = 4\,\mathrm{cm}$*, širine* $c = 1\,\mathrm{cm}$ *i zanemarljive debljine s obzirom na osi paralelne sa stranicama kutnika koje prolazi kroz centar mase (slika 7.26.). Masa kutnika iznosi* $m = 7\,\mathrm{g}$.



Slika 7.26.

Rezultat: $I'_x = I'_y = 9.4\,\mathrm{g\,cm^2}$.

Problem 7.4.2 *Izračunajte glavne momente tromosti homogenog valjka mase* m*, polumjera* R *i visine* h *s obzirom na osi kroz centar mase valjka.*

Rezultat: $I_x = I_y = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$.

Problem 7.4.3 *Valjak (kotač) promjera* $30\,\mathrm{cm}$*, koji se vrti brzinom* $1200\frac{okr}{\mathrm{min}}$*, počinje se jednoliko zaustavljati i zaustavi se nakon* $100\,\mathrm{s}$*. Kolike su brzina i akceleracija točke na udaljenosti* $10\,\mathrm{cm}$ *od centra* $50\,\mathrm{s}$ *nakon početka usporavanja?*

Rezultat: $v = 6.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ a_r = 394\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ a_t = 0.13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ a = 394\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 7.4.4 *Valjak čiji se centar mase giba brzinom* $v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *počinje se kotrljati (bez klizanja) uz kosinu nagiba* $\alpha = 30°$*.Nakon kojeg se vremena valjak zaustavlja? Koliki je minimalni koeficijent trenja potreban da bi takvo gibanje bilo moguće? Masa valjka iznosi* $m = 1\,\mathrm{kg}$.

Rezultat: $t = 0.1\,\mathrm{s},\ \mu \geq 0.59$.

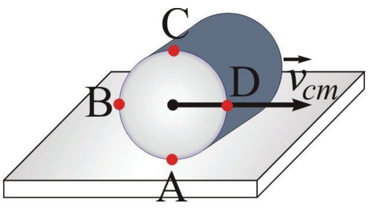
Problem 7.4.5 *Loptica počne kliziti početnom brzinom* $v_0 = 6.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *po vodoravnoj podlozi. Nakon koliko vremena će se početi kotrljati? Koeficijent trenja klizanja iznosi* $\mu = 0.3$.

Rezultat: $t = 0.63\,\mathrm{s}$.

Problem 7.4.6 *Homogeni valjak momenta tromosti* I_z *počinje rotirati u fluidu pod utjecajem vanjskog zakretnog momenta* $M = \alpha I_z$. *Pretpostavite da je otporni moment sredstva proporcionalan kutnoj brzini vrtnje,* $M_{ot} = -b\omega$. *Kakva je ovisnost kutne brzine o vremenu? Nacrtajte* $\omega(t)$ *dijagram. Kolika je granična brzina kojom će se valjak, vrtjeti jednoliko, računajte sa* $I_z = 1\,\mathrm{kg\,m^2}$, $\alpha = 10\,\mathrm{s^{-2}}$ *i* $b = 0.7\,\mathrm{N\,m\,s}$?

Rezultat: $\omega = \frac{Ia}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{I}}\right)$, $\omega_g = 14.3\,\mathrm{s^{-1}}$.

Problem 7.4.7 *Homogeni valjak promjera* $r = 30\,\mathrm{cm}$ *kotrlja se bez klizanja po vodoravnoj podlozi. Brzina centra mase valjka iznosi* $v_{cm} = 0.43\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Kolike su brzine točaka A, B, C i D (slika 7.27.)?*



Slika 7.27.

Rezultat: $v_A = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_B = 0.6081\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_C = 0.86\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_D = 0.6081\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 7.4.8 *U središtu vodoravne platforme mase* $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$ *i polumjera* $r_1 = 1\,\mathrm{m}$ *stoji čovjek raširenih ruku u kojima drži utege, rotira frekvencijom* $f = 20\frac{okr}{\mathrm{min}}$. *Kolika će biti frekvencija okretanja platforme ako čovjek spusti ruke i time smanji svoj moment tromosti sa* $2.94\,\mathrm{kg\,m^2}$ *na* $0.98\,\mathrm{kg\,m^2}$? *Pretpostavite da platforma ima oblik diska.*

Rezultat: $f' = 0.35\,\mathrm{Hz}$.

Problem 7.4.9 *Pretpostavite gravitacijski kolaps (stezanje) Sunca u Pulsar.*
Odredite omjer kinetičkih energija rotacije Pulsara i Sunca $\frac{E^p_{rot}}{E^s_{rot}}$ *za polumjer Pulsara* $R_p = 1.5 \cdot 10^4\,\mathrm{m}$. *Period rotacije Sunca oko vlastite osi iznosi* $25\,\mathrm{d}$.

Rezultat: $\frac{E^p_{rot}}{E^s_{rot}} = 2.15 \cdot 10^9$.

Poglavlje 8

GRAVITACIJA

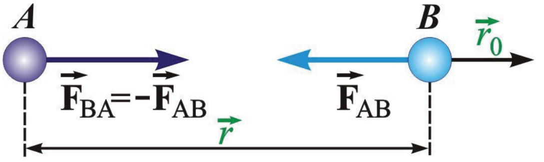
8.1 Osnovni pojmovi i definicije

Newtonov zakon gravitacije može se formulirati na slijedeći način:

Definicija 8.1.1 *Svaka materijalna točka privlači neku drugu materijalnu točku silom koja djeluje na spojnici materijalnih točaka i koja je upravo proporcionalna produktu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovih međusobnih rastojanja.*

$$\overrightarrow{F} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \cdot \overrightarrow{r}_0 \tag{8.1.1}$$

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_A = -\overrightarrow{F}_B$$



Slika 8.1.

gdje je $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$ - univerzalna gravitacijska konstanta, a $\overrightarrow{r}_0$ - jedinični vektor.

Napomena: Relacija (8.1.1) vrijedi, osim za materijalne točke, za dvije kuglaste mase čija je gustoća konstantna ili ovisi samo o polumjeru kugle. Porijeklo gravitacijske sile možemo naći u gravitacijskom polju.

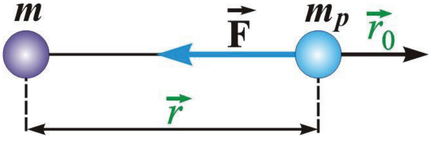
Definicija 8.1.2 *Gravitacijsko polje je vid materijalnosti koja se prostire oko tijela mase m i u kome se u susretu sa drugim gravitacijskim poljem odvijaju procesi koji se manifestiraju silom.*

Za opis gravitacijskog polja koristimo fizičku veličinu koju zovemo jakost polja ($\overrightarrow{\gamma}$).

Definicija 8.1.3 *Mjera za jakost ili intenzitet gravitacijskog polja jest sila ($\overrightarrow{F}$) kojom to polje djeluje na jedinicu mase (m_p)*

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{\overrightarrow{F}}{m_p} \tag{8.1.2}$$

Posljedica: Na osnovu relacije (8.1.2) slijedi da je jakost gravitacijskog polja također vektorska veličina koja ima pravac i smjer gravitacijske sile. Ako povežemo danu relaciju s relacijom (8.1.1) imamo:



Slika 8.2.

$$\overrightarrow{\gamma} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \overrightarrow{r}_0 \tag{8.1.3}$$

Ova relacija također predstavlja određenje jakosti gravitacijskog polja, odakle još jasnije može zapaziti kako je ta fizikalna veličina u funkciji tijela čije polje promatramo. Jakost polja proporcionalna je masi, a obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja točke u promatranom polju.

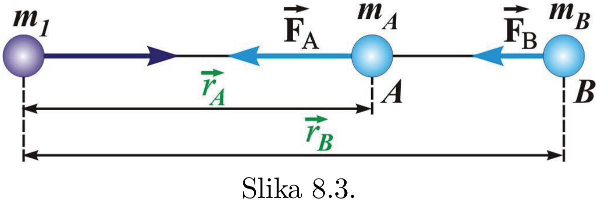
Jedinica za jakost gravitacijskog polja je

$$\gamma \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = \frac{F\left[\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}{m\,[\mathrm{kg}]}$$

Rad, potencijalna energija i potencijal gravitacijskog polja

Da bismo odredili rad u gravitacijskom polju promatrajmo jednostavan slučaj.

Neka se tijelo mase m pomiče od točke A do točke B u gravitacijskom polju tijela mase m_1 (slika 8.3.),



Slika 8.3.

tada se svladava sila
$\overrightarrow{F}$ na putu

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A = d\overrightarrow{r}$$

Na osnovu definicije gravitacijske sile i rada

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{m_1 \cdot m}{r^2}\overrightarrow{r}_0$$

$$dW = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

Napomena: Obratiti pozornost da su vektori $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{F}$ kolinearni, kut je $\theta = 180° = \pi$, $\cos\pi = -1$ i da je sila promjenjiva od točke A do točke B. Možemo koristiti skalarne vrijednosti:

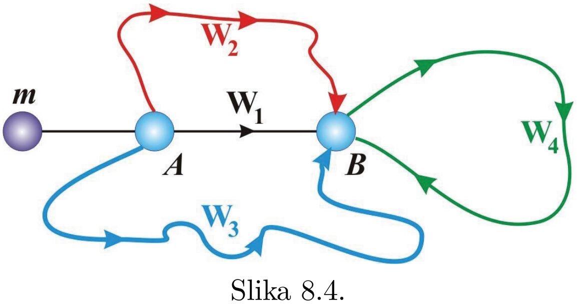
$$dW = -Fdr$$

$$dW = G\frac{m_1 \cdot m}{r^2}dr \Big/ \int$$

$$W = Gm_1 \cdot m\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = Gm_1 \cdot m\left[\left(-\frac{1}{r_2}\right) - \left(-\frac{1}{r_1}\right)\right]$$

$$W = Gm_1 \cdot m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{8.1.4}$$

Relacija (8.1.4) predstavlja rad u gravitacijskom polju prilikom pomicanja tijela mase m u gravitacijskom polju mase m_1.



Slika 8.4.

Posljedica: Iz navedene relacije slijedi da rad ne ovisi od oblika putanje, nego samo od početne i krajnje točke (r_1 i r_2).

To znači da će rad po zatvorenoj konturi uvijek biti jednak nuli ($W = 0$).

Ovo svojstvo imaju konzervativna polja.

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 = W_3 \\ W_4 &= 0 \end{aligned}$$

Poznato nam je da rad predstavlja mjeru promjene energije $W = \Delta E$, a u našem primjeru došlo jer do promjene potencijalne energije:

$$E = E_{p_2} - E_{p_1} \tag{8.1.5}$$

Na osnovi (8.1.4) i (8.1.5) slijedi:

$$W = -Gm_1 m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$E_{p_2} = -G\frac{m_1 m}{r_2};\; E_{p_1} = -G\frac{m_1 m}{r_1}$$

odnosno

$$E_p = -G\frac{m_1 m}{r} \tag{8.1.6}$$

Relacija (8.1.6) predstavlja potencijalnu energiju tijela mase m_1 u gravitacijskom polju tijela mase m na rastojanju r. Fizikalnu veličinu koja opisuje energetsko stanje polja, nazivamo gravitacijskim potencijalom.

Definicija 8.1.4 *Gravitacijski potencijal (φ) u promatranoj točki gravitacijskog polja brojno je jednak potencijalnoj energiji (E_p) koju ima jedinična masa (m_0):*

$$\varphi = \frac{E_p}{m_0}$$

Posljedica: Koristeći relaciju (8.1.6) i navedenu definiciju gravitacijski potencijal možemo pisati u obliku:

$$\varphi = -G\frac{m}{r} \tag{8.1.7}$$

Navedena relacija predstavlja također definiciju gravitacijskog potencijala iz koje se jasnije vidi da je on skalarna veličina koja ovisi od mase tijela (m) čije polje promatramo i rastojanja promatrane točke (r).

Jedinica za gravitacijski potencijal je

$$\varphi\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] = \frac{E_p\,[\mathrm{J}]}{m\,[\mathrm{kg}]}$$

Razlika potencijala između dvije točke u polju nazivamo naponom gravitacijskog polja $U = \varphi_2 - \varphi_1$.

8.2 Problemski zadaci

Problem 8.2.1 *Uz pretpostavku da je Zemlja homogeno tijelo koliko iznosi gravitacijska sila u središtu Zemlje? Objasnite?*

Odgovor:

U središtu je Zemlje gravitacijska sila jednaka nuli. Budući da pretpostavljamo homogenost Zemlje elementarni dijelovi mase su raspoređeni simetrično oko središta Zemlje i poništavaju se pa je ukupna sila jednaka nuli.

Problem 8.2.2 *Ukoliko se povečava gustoću određenog tijela, a volumen mu se zadržava konstantnim, kako se mijenja jakost gravitacijskog polja u točki A koja je na istoj udaljenosti od tijela?*

Odgovor:

Razmotrimo li izraz za gravitacijsko polje, uočavamo da je ono proporcionalno masi tijela, odnosno njogovoj gustoći. Dakle, kako se mijenja gustoća tijela tako se mijenja i jakost gravitacijskog polja. Budući da se gustoća povećava, povećava se i jakost gravitacijskog polja u točki A proporcionalno gutoći.

Problem 8.2.3 *Dva tijela se nalaze na udaljenosti d jedno od drugog. Ako tu udaljenost povećamo 5 puta koliko puta moramo povećati masu samo jednog tijela da bi gravitacijska sila između njih ostala konstantna, a koliko ako povećavamo masu oba tijela?*

Odgovor:

Ako povećavamo udaljenost 5 puta gravitacijska sila se, zbog obrnute proporcionalnosti s kvadratom udaljenosti, smanjuje 25 puta pa je potrebno isto toliko povećati masu jednog tijela. Ako povećavamo masu oba tijela umnožak povećanja masa mora biti jednak 25.

Problem 8.2.4 *Promotrite intezitet jakosti gravitacijskog polja između dva tijela. Kakav oblik tijela ili putanje će oblikovati uvjet da je u svim točkama intezitet ukupne jakosti gravitacijskog polja dva tijela konstantan?*

Odgovor:

Jakost gravitacijskog polja je sferno simetričan pa je intezitet jakosti gravitacijskog polja na površini određene sfere konstantan. Kako imamo dva tijela, to moramo razmatrati dvije sfere. Presjek dvije sfere je kružnica i na toj kružnici će biti intezitet jakosti gravitacijskog polja konstantan. Dakle, konstantni intezitet jakosti gravitacijskog polja definira kružnicu, mada se ta vrijednst može pojaviti i u nekim karakterističnim točkama što se može dobiti iz detaljnijih razmatranja.

Problem 8.2.5 *Polje sile Zemljine teže (odnosno ubrzanje slobodnog pada) je veće na polovima, a manje na ekvatoru. Objasnite zašto?*

Odgovor:
Polje sile Zemljine teže jednako je vektorskom zbroju gravitacijskog polja Zemlje i centrifugalne akceleracije zbrog vrtnje Zemlje. Kako centrifugalna akceleracija ima veći iznos na ekvatoru nego na polu i na ekvatoru ima smjer suprotan smjeru gravitacijskog polja, to će ukupno polje sile teže biti manje na ekvatoru. Drugi razlog je spljoštenost Zemlje na polovima čiji je uzrok vrtnja Zemlje oko vlastite osi.

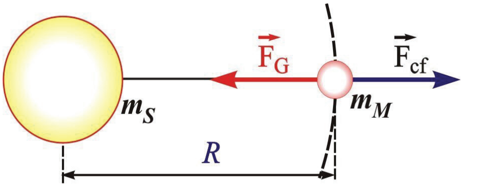
8.3 Primjeri

Primjer 8.3.1 *Planeta Merkur ima promjer $D = 4880\,\mathrm{km}$, a udaljenost središta Merkura od središta Sunca $R = 57.9 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Srednja gustoća Merkura iznosi $\rho = 5430 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a vrijeme obilaska Merkura oko Sunca (Merkurova godina) iznosi $T = 5.07 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$. Izračunajte kolika je gravitacijska sila privlačenja između Merkura i Sunca. Pretpostavite da se planet Merkur giba po kružnoj putanji oko Sunca.*

Rješenje:

Gravitacijska sila privlačenja između Merkura i Sunca dobiva se pomoću Newtonova zakona gravitacije

$$F_G = \gamma \frac{m_S \cdot m_M}{R^2}$$



Slika 8.5.

Da bi se planet gibao po kružnici moraju gravitacijska i centrifugalna sila biti jednake po iznosu, tj. mora vrijediti uvjet

$$F_G = F_{cf} = m_M \cdot \omega^2 R$$

Koristeći izraze za masu

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{6} D^3 \rho$$

i kutnu brzinu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi}{6} D^3 \rho \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{2\pi^3 \rho D^3 R}{3T^2} \\ &= \frac{2\pi^3 \cdot 5430 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(4.88 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\right)^3 \cdot 5.79 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}}{3 \cdot (5.0674 \cdot 10^6\,\mathrm{s})^2} = 2.941\,2 \cdot 10^{22}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 8.3.2 *Izračunajte masu Sunca i gravitacijsko ubrzanje g_s na površini Sunca ako je njegov polumjer $r_s = 695.5 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, polumjer Zemljine orbite $r_{zs} = 149.6{\cdot}10^6\,\mathrm{km}$, a period obilaska Zemlje oko Sunca $T_{zs} = 365.26\,\mathrm{d}$.*

Rješenje:

Iz općeg zakona gravitacije imamo

$$\begin{aligned} F_G &= F_{cf} \\ \gamma \cdot \frac{M_s \cdot m_z}{r_{zs}^2} &= m_z \cdot \omega^2 \cdot r_{zs} \end{aligned}$$

i uz izraz za kutnu brzinu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dobivamo masu Sunca

$$\begin{aligned} M_s &= \frac{\omega^2 r_{zs}^3}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r_{zs}^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\right)^3}{6.67259 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot (3.155\,8 \cdot 10^7\,\mathrm{s})^2} \\ &= 1.\,989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Jakost gravitacijskog polja na površini iznosi

$$\begin{aligned} g_s &= \gamma \frac{M_s}{r_s^2} = \frac{4\pi^2 r_{zs}^3}{r_s^2 T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\right)^3}{(6.955 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^2 \cdot (3.155\,8 \cdot 10^7\,\mathrm{s})^2} \\ &= 274.\,37 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 28 g_z \end{aligned}$$

Primjer 8.3.3 *Čovjek na površini Zemlje može skočiti u vis maksimalno $h = 0.25\,\mathrm{m}$. Do koje visine bi čovjek mogao maksimalno skočiti na površini Mjeseca? Otpor zraka zanemarite. Polumjer Mjeseca je je 3.7 puta manji od polumjera Zemlje, a masa mu je 81 puta manja.*

Rješenje:

Kako čovjek ima početnu brzinu istu na Zemlji i Mjesecu, to će maksimalna visina skoka ovisiti samo o jakosti gravitacijskog ubrzanja. Označimo sa g_z jakost gravitacijskog ubrzanja na Zemlji, a sa g_m na Mjesecu. Tada je

$$\begin{aligned} h_z &= \frac{v_0^2}{2g_z} = \frac{v_0^2}{2 \cdot \gamma \frac{M_z}{R_z^2}} = \frac{R_z^2 \cdot v_0^2}{2\gamma M_z} \\ h_m &= \frac{R_m^2 \cdot v_0^2}{2\gamma M_m} \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{h_z}{h_m} = \frac{\frac{R_z^2 \cdot v_0^2}{2\gamma M_Z}}{\frac{R_m^2 \cdot v_0^2}{2\gamma M_m}} = \frac{M_m}{M_z}\left(\frac{R_z}{R_m}\right)^2 = \frac{M_m}{81 M_m}\left(\frac{3.7 R_m}{R_m}\right)^2 = 0.169\,01$$

odnosno

$$h_m = \frac{h_z}{0.16901} = \frac{0.25\,\mathrm{m}}{0.16901} = 1.\,479\,2\,\mathrm{m}$$

Primjer 8.3.4 *Koliko iznosi udaljenost od središta Zemlje do središta Mjeseca ako je vrijeme obilaska Mjeseca oko Zemlje $T = 27.32\ \mathrm{d}$? (Srednji polumjer Zemlje iznosi $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$, a jakost gravitacijskog polja Zemlje iznosi $\gamma = 9.83 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$).*

Rješenje:

Da bi se Mjesec gibao po kružnici mora centrifugalna sila kružnog gibanja biti jednaka težini pa vrijedi

$$\begin{aligned} G_M &= F_{cf} \\ G_M &= M_M \cdot \gamma_{ZM} = G\frac{M_M\ M_Z}{d^2} \\ F_{cf} &= \frac{4\pi^2 d \cdot M_M}{T_{MZ}^2} \end{aligned}$$

odnosno

$$G\frac{M_Z}{d^2} = \frac{4\pi^2 d}{T_{MZ}^2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{G M_Z T_{MZ}^2}{4\pi^2}}$$

no, kako je

$$\gamma = G\frac{M_Z}{R_Z^2} \Rightarrow G M_Z = \gamma R_Z^2$$

vrijedi

$$d = \sqrt[3]{\frac{\gamma R_Z^2 T_{MZ}^2}{4\pi^2}} = 3.8299 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \approx 61 R_Z$$

Primjer 8.3.5 *Planet mase m giba se po kružnoj putanji oko Sunca brzinom $v = 35.02 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Odredite period obilaska ovog planeta oko Sunca. Masa Sunca iznosi $M_S = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, a gravitacijska konstanta $\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{kg}^2}$.*

Rješenje:

Da bi planet kružio oko Sunca mora vrijediti $F_G = F_{cf}$, koristeći izraze

$$F_G = G\frac{M_S\ M_p}{R_{SP}^2}$$
$$F_{cf} = \frac{4\pi^2 M_P}{T^2} R_{SP}$$

gdje je R_{SP} - udaljenost planeta od Sunca, M_P - masa i T - period planeta, dobivamo

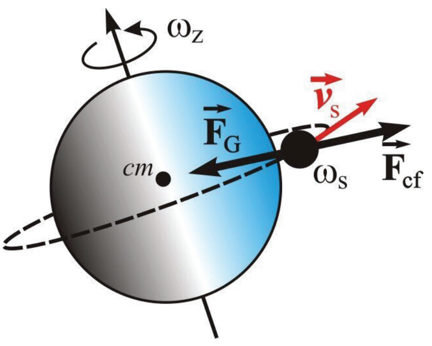
$$G\frac{M_S\ M_p}{R_{SP}^2} = \frac{4\pi^2 M_P}{T^2} R_{SP}$$

uz korištenje izraza $R = \frac{v \cdot T}{2\pi}$ slijedi

$$T = \frac{2\pi G M_S}{v^3} = \frac{2\pi \cdot 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\left(35.02 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)^3} = 1.9523 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$$

Primjer 8.3.6 *Zemljin umjetni satelit se giba u ekvatorijalnoj ravnini Zemlje na udaljenosti $R = 2 \cdot 10^7$ m od njenog centra. Smjer gibanja je od zapada prema istoku (isti je kao i smjer rotacije Zemlje). Jednu istu točku na ekvatoru satelit nadlijeće poslije svakih $T_S = 11.6$ h. Kolika je masa Zemlje, na osnovu ovih podataka?*

Rješenje:



Slika 8.6.

Ukupna sila koja djeluje na satelit mora biti jednaka nuli pa gravitacijska sila koja djeluje na satelit mora biti jednaka centrifugalnoj sili kružnog gibanja satelita $F_G = F_{cf}$. Gravitacijska sila (8.1.1) iznosi

$$F_G = G\frac{M_Z \cdot m_S}{R^2}$$

gdje je m_S - masa satelita. Mi mjerimo relativni period kruženja, a stvarni period je

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_S - \omega_Z$$

gdje je ω_S - stvarna kutna brzina satelita, a ω_Z - kutna brzina Zemlje. Ovdje smo pretpostavili da je kutna brzina satelita veća od kutne brzine Zemlje. Zadatak se analogno riješava i za slučaj kad je kutna brzina manja, samo tražimo $\omega_Z - \omega_S$.

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{T} &= \omega_S - \omega_Z \\
\frac{2\pi}{T} &= \omega_S - \frac{2\pi}{T_Z} \\
\omega_S &= 2\pi\left(\frac{T_Z + T_S}{T_Z \cdot T_S}\right) = 2.23 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Iz uvjeta $F_G = F_{cf}$ slijedi

$$G\frac{M_Z \cdot m_S}{R^2} = m_S \cdot \omega_S^2\ R$$

odakle je

$$M_Z = \frac{\omega_S^2\ R^3}{G} = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Primjer 8.3.7 *Satelit je lansiran s ekvatora i kreće se po kružnoj putanji u ekvatorijalnoj ravnini u smjeru vrtnje Zemlje. Odredite omjer između polumjera putanje satelita i polumjera Zemlje* $\frac{R_S}{R_Z}$ *ako satelit periodički prolazi iznad mjesta lansiranja s periodom od* 5 *dana.*

Rješenje:

Prividna brzina satelita iznad mjesta lansiranja može biti i u smjeru vrtnje Zemlje (ako je kutna brzina satelita veća od kutne brzine Zemlje) i suprotno smjeru vrtnje Zemlje (ako je kutna brzina satelita manja od kutne brzine Zemlje).

a) $\omega_S > \omega_Z$

$$(\omega_S - \omega_Z) = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{5T_Z}$$

jer je $T_Z = 1$ *dan*. Odavde slijedi

$$\omega_S = \frac{12\pi}{5T_Z}$$

b) $\omega_S < \omega_Z$

$$\begin{aligned}(\omega_Z - \omega_S) &= \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{5T_Z} \\ \omega_S &= \frac{8\pi}{5T_Z}\end{aligned}$$

Kako za satelit moraju biti izjednačene gravitacijska i centrifugalna sila

$$m\omega_S^2 \cdot R_S = G\frac{M_Z m}{R_S^2}$$

No, kako vrijedi

$$G\frac{M_Z}{R_Z^2} = g$$

to je

$$\omega_S^2 \cdot R_S = g\frac{R_Z^2}{R_S^2}$$

odnosno

$$\frac{R_S}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{g}{R_Z\omega_S^2}}$$

što za slučaj $\omega_S > \omega_Z$ daje

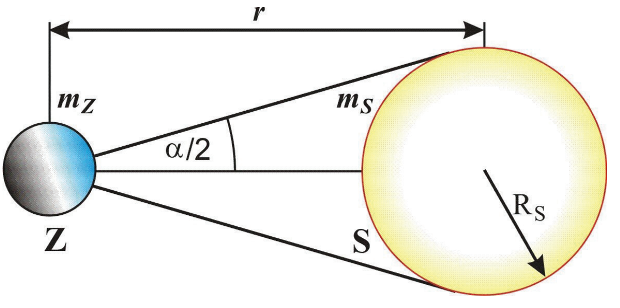
$$\frac{R_S}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{g}{R_Z\left(\frac{12\pi}{5T_Z}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{25g \cdot T_Z^2}{144\pi^2 R_Z}} = 5.86$$

a za $\omega_S < \omega_Z$

$$\frac{R_S}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{g}{R_Z\left(\frac{8\pi}{5T_Z}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{25g \cdot T_Z^2}{64\pi^2 R_Z}} = 7.68$$

Primjer 8.3.8 *Sunce se vidi pod kutom od približno* $\alpha = 10^{-2}$ *rad. Iz tog podatka pronađite odnos prosječne gustoće Zemlje i Sunca. Pretpostavlja se da su Zemlja i Sunce jednolike gustoće.*

Rješenje:



Slika 8.7.

Ako je kut pod kojim vidimo Sunce α, tada iz slike slijedi:

$$R_S = r \sin \frac{\alpha}{2}$$

gdje je r - udaljenost od Zemlje do Sunca, a R_S - polumjer Sunca. Kako je α jako mala veličina, možemo primijeniti aproksimaciju:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \text{za } \alpha \approx 0$$

odakle slijedi

$$2R_S = r \cdot \alpha \Longrightarrow r = \frac{2R_S}{\alpha} \tag{8.3.1}$$

Koristimo gravitacijski uvjet

$$\begin{aligned} F_{cf} &= F_G \\ m_Z \cdot \omega_{ZS}^2 \cdot r &= m_Z \cdot \left(\frac{2\pi}{T_{ZS}}\right)^2 r = G\frac{m_Z \cdot m_S}{r^2} \end{aligned}$$

gdje su m_Z - masa Zemlje, m_S - masa Sunca, ω_{ZS}, T_{ZS} - kutna brzina, odnosno period Zemlje oko Sunca. Dakle, uz izraz za ubrzanje zemljine teže na površini $g = G\frac{m_Z}{R_Z^2}$ imamo

$$m_Z \cdot \frac{4\pi^2}{T_{ZS}^2} r = g\frac{R_Z^2 \cdot m_S}{r^2} \Longrightarrow \frac{m_Z}{m_S} = \frac{g \cdot R_Z^2 \cdot T_{ZS}^2}{4\pi^2 r^3}$$

no, uz izraze za masu preko volumena Zemlje i Sunca

$$m_Z = \frac{4\pi}{3} R_Z^3 \cdot \rho_Z; \quad m_S = \frac{4\pi}{3} R_S^3 \cdot \rho_S$$

imamo

$$\begin{aligned} \frac{\frac{4\pi}{3} R_Z^3 \cdot \rho_Z}{\frac{4\pi}{3} R_S^3 \cdot \rho_S} &= \frac{g \cdot R_Z^2 \cdot T_{ZS}^2}{4\pi^2 r^3} \\ \frac{\rho_Z}{\rho_S} &= \frac{g \cdot R_S^3 \cdot T_{ZS}^2}{4\pi^2 \cdot r^3 \cdot R_Z} \end{aligned}$$

Koristeći izraz (8.3.1), slijedi

$$\frac{\rho_Z}{\rho_S} = \frac{g \cdot R_S^3 \cdot T_{ZS}^2}{4\pi^2 \left(\frac{2R_S}{\alpha}\right)^3 \cdot R_Z} = \frac{g \cdot \alpha^3 \cdot T_{ZS}^2}{32\pi^2 \cdot R_Z}$$

i za $T_{ZS} = 1$ godina $= 3.16 \times 10^7$ s te $R_Z = 6370$ km imamo:

$$\frac{\rho_Z}{\rho_S} = 4.86$$

Primjer 8.3.9 *Satelit mase* $m = 1000\,\mathrm{kg}$ *kruži oko Zemlje na visini* $h = 1000\,\mathrm{km}$ *od površine Zemlje. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.*

Rješenje:

Privlačna sila između satelita i Zemlje

$$F = G \frac{m_s \cdot m_z}{(R_z + h)^2}$$

daje satelitu potrebnu centripetalnu akceleraciju

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R_z + h}$$

pa jednadžba gibanja satelita glasi

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a_{cp} \\ G \cdot \frac{m_s \cdot m_z}{(R_z + h)^2} &= m_s \cdot \frac{v^2}{R_z + h} \end{aligned}$$

gdje je $R_z + h-$ polumjer putanje satelita, m_s- masa satelita, a m_z- masa Zemlje. Iz činjenice da je sila teže na Zemljinoj površini jednaka (uz zanemarenje utjecaja vertnje Zemlje)

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_z}{R_z^2}$$

dobivamo

$$m_z = \frac{g \cdot R_z^2}{G}$$

pa za prethodnu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} G\frac{m_s \cdot \frac{g \cdot R_z^2}{G}}{(R_z+h)^2} &= \frac{m_s \cdot g \cdot R_z^2}{(R_z+h)^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{R_z+h} \\ v^2 &= \frac{g \cdot R_z^2}{(R_z+h)} \Longrightarrow v = R_z \cdot \sqrt{\frac{g}{R_z+h}} \end{aligned}$$

što uz vrijednosti konstanti daje

$$v = 6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 10^6\,\mathrm{m}}} = 7349.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ophodno vrijeme satelita oko Zemlje iznosi

$$T = \frac{2\pi\,(R_z+h)}{v} = \frac{2\pi\left(6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 10^6\,\mathrm{m}\right)}{7349.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 6301.1\,\mathrm{s}$$

Kinetička energija satelita iznosi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{kg} \cdot \left(7349.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$$

dok je potencijalna energija

$$\begin{aligned} E_p &= -G \cdot \frac{m_s \cdot m_z}{R_z+h} = -\frac{m_s \cdot g \cdot R_z^2}{R_z+h} \\ &= -\frac{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\right)^2}{6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 10^6\,\mathrm{m}} = -5.4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

pa je ukupna energija jednaka

$$E = E_k + E_p = 2.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} + \left(-5.4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\right) = -2.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$$

Primjer 8.3.10 *Na koju visinu iznad Zemlje treba podići tijelo da bi se gravitacijsko privlačenje smanjilo za* 40%*?*

Rješenje:
Označimo sa $g' = g - \left(\frac{40}{100} g\right) = 0.6 \cdot g$ jakost gravitacijskog privlačenja na visini h. Iz definicije jakosti gravitacijskog polja mora vrijediti

$$\begin{aligned} g &= G \frac{m_Z}{R_Z^2} \\ g' &= G \frac{m_Z}{(R_Z + h)^2} \end{aligned}$$

podijelimo li ove jednadžbe slijedi

$$\frac{g}{g'} = \frac{G \frac{m_Z}{R_Z^2}}{G \frac{m_Z}{(R_Z+h)^2}} = \frac{(R_Z + h)^2}{R_Z^2} = \left(\frac{R_Z + h}{R_Z}\right)^2 = \left(1 - \frac{h}{R_Z}\right)^2$$

rješavanjem jednakosti uz vrijednost $R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \ m$ dobivamo

$$\begin{aligned} h &= R_z \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right) = R_Z \left(\sqrt{\frac{g}{0.6 \cdot g}} - 1\right) = 0.291 \cdot R_Z \\ h &= 0.291 \cdot 6.37 \cdot 10^6 \ \text{ m} = 1,8537 \cdot 10^6 \ \text{ m} = 1853.7 \ \text{ km} \end{aligned}$$

Primjer 8.3.11 *Izračunajte jakost gravitacijskog polja i gravitacijski potencijal Zemlje u točki na visini od* $h = 2500\,\text{km}$ *iznad zemljine površine. Pretpostavite da je Zemlja homogena kugla. Koliko je u toj točki gravitacijsko polje Sunca?*

Rješenje:
Jakost gravitacijskog polja Zemlje na visini h zadan je izrazom

$$\begin{aligned} \gamma_z &= G \frac{m_z}{(R_z + h)^2} = \frac{g R_z^2}{(R_z + h)^2} \\ &= \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(6.37 \cdot 10^6 \ \text{ m}\right)^2}{(6.37 \cdot 10^6 \ \text{ m} + 2.5 \cdot 10^6 \ \text{ m})^2} = 5.059\,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

dok je gravitacijski potencijal jednak

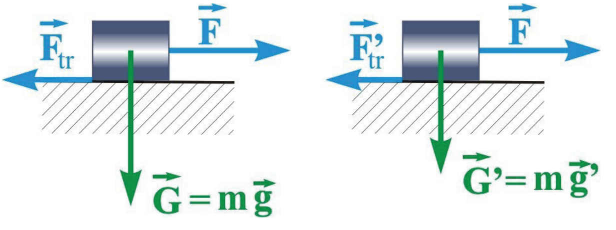
$$\begin{aligned} V_z &= -G \frac{m_z}{(R_z + h)} = -\frac{g R_z^2}{R_z + h} \\ &= -\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(6.37 \cdot 10^6 \ \text{ m}\right)^2}{6.37 \cdot 10^6 \ \text{ m} + 2.5 \cdot 10^6 \ \text{ m}} = -4.487\,7 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Gravitacijsko polje Sunca je u toj točki

$$\gamma_s = \frac{Gm_s}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{\mathrm{kg\,s^2}} \cdot 1.98 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1.49 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2} = 5.9487 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

i još uvijek je zanemarivo u usporedbi sa gravitacijskim poljem Zemlje u toj točki.

Primjer 8.3.12 *Čovjek na površini Zemlje vuče tijelo mase* $m = 50\,\mathrm{kg}$ *po horizontalnoj podlozi silom od* $F = 200\,\mathrm{N}$ *paralelno sa podlogom, pri čemu se tijelo se ubrzava akceleracijom* $a = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. *Na kojoj visini* h *iznad Zemlje bi trebao biti isti sustav da bi ubrzanje bilo* 1% *veće (slika 8.8.)?*



Slika 8.8.

Rješenje:

Iz jednadžbi gibanja na površini Zemlje imamo

$$\sum_i F_i = F - F_{tr} = F - \mu mg = ma$$

dok je na visini h,

$$\sum_i F_i = F - F'_{tr} = F - \mu mg' = ma'$$

gdje su g' ubrzanje sile Zemljine teže i a' ubrzanje tijela na visini h. Uz izraze za g na površini Zemlje i g' na visini h

$$g = \frac{Gm_z}{R_z^2};\ g' = \frac{Gm_z}{(R_z + h)^2}$$

jednadžbe gibanja postaju,

$$
\begin{aligned}
F-\mu m g &= ma \\
F-ma &= \mu m g=\mu m\frac{Gm_z}{R_z^2} \\
F-\mu m g' &= ma' \\
F-ma' &= \mu m g'=\mu m\frac{Gm_z}{(R_z+h)^2}
\end{aligned}
$$

odakle, uz ubrzanje $a'=1.01a$ dijeljenjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{F-ma}{F-ma'} &= \frac{\mu m\frac{Gm_z}{R_z^2}}{\mu m\frac{Gm_z}{(R_z+h)^2}}=\frac{(R_z+h)^2}{R_z^2}=\left(1+\frac{h}{R_z}\right)^2 \\
\frac{h}{R_z} &= \sqrt{\frac{F-ma}{F-ma'}}-1 \\
h &= R_z\left(\sqrt{\frac{F-ma}{F-ma'}}-1\right) \\
&= 6.37\cdot 10^6\,\mathrm{m}\left(\sqrt{\frac{200\,\mathrm{N}-50\,\mathrm{kg}\cdot 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{200\,\mathrm{N}-50\,\mathrm{kg}\cdot 1.01\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}-1\right)=10643\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

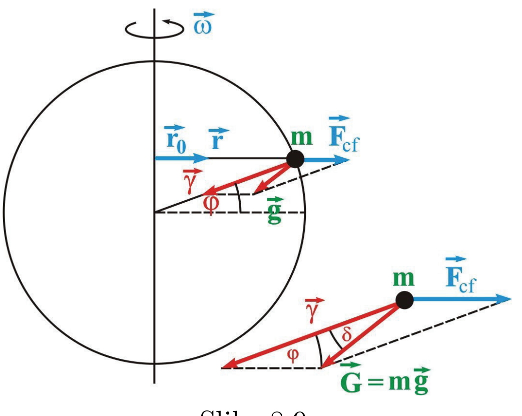
Primjer 8.3.13 *Izračunajte kut između vektora gravitacijskog polja i vektora akceleracije sile Zemljine teže na* 45° *zemljopisne širine.*

Rješenje:

Sila teže je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile

$$\vec{G}=\vec{F}_G+\vec{F}_{cf}$$

Centrifugalna sila koja djeluje na tijelo mase m koje se nalazi na Zemljinoj površini nastaje zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi te iznosi



Slika 8.9.

$$\vec{F}_{cf}=m\omega^2\vec{r}=m\omega^2R_z\cos\varphi\cdot\vec{r}_0$$

Kut δ između vektora $\overrightarrow{\gamma} = \frac{\overrightarrow{F}_G}{m}$ i vektora $\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{G}}{m}$ izosi

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \frac{a_{cf}}{g}\sin\varphi = \frac{4\pi^2 R_z \sin\varphi\cos\varphi}{gT^2} = 1.7\cdot 10^{-3}\\ \delta &= \arcsin 1.7\cdot 10^{-3} = 5.9'\end{aligned}$$

Primjer 8.3.14 *Središte željezne kugle mase $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ udaljeno je $l = 20\,\mathrm{m}$ od središta aluminijske kugle mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. Kolika je jakost gravitacijskog polja kugli u točki koja je:*

a) udaljena $r_1 = 5\,\mathrm{m}$ od centra mase m_1, a $r_2 = 15\,\mathrm{m}$ od centra mase m_2,

b) udaljena $r_1' = 14\,\mathrm{m}$ od centra mase m_1 a $r_2' = 18\,\mathrm{m}$ od centra mase m_2,

c) koliki je gravitacijski potencijal u tim točkama?

Rješenje:

a) Točka u kojoj treba odrediti jakost gravitacijskog polja nalazi se na spojnici masa, jer je $r_1 + r_2 = l$. Zanemarimo li polumjere kugli i predstavimo li kugle materijalnim točkama, vrijedi gravitacijski zakon. Pretpostavimo li koordinatni sustav tako da se ishodište nalazi u točki A, a pozitivni smjer osi x neka je u smjeru mase m_2. Tada masa m_1 u točki A stvara jakost gravitacijskog polja

$$\gamma_{A_1} = -G\frac{m_1}{r_1^2}$$

dok masa m_2 ima

$$\gamma_{A_2} = G\frac{m_2}{r_2^2}$$

pa je ukupna jakost polja

$$\begin{aligned}\gamma_A &= \gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} = -G\frac{m_1}{r_1^2} + G\frac{m_2}{r_2^2} = G\left(\frac{m_2}{r_2^2} - \frac{m_1}{r_1^2}\right)\\ &= 6.67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\cdot\left[\frac{2\,\mathrm{kg}}{(15\,\mathrm{m})^2} - \frac{5\,\mathrm{kg}}{(5\,\mathrm{m})^2}\right]\\ &= -1.27\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Dakle, ukupna jakost gravitacijskog polja je u smjeru mase m_1 od točke A i ima dobiveni intezitet.

b) Označimo sa B točku u kojoj se traži jakost gravitacijskog polja. Po kosinusovu poučku, jakost gravitacijskog polja u točki B će biti

$$\gamma_B = \sqrt{\left(\gamma_{1_B}\right)^2 + \left(\gamma_{2_B}\right)^2 - 2\gamma_{1_B} \cdot \gamma_{2_B} \cos\left(\pi - \alpha\right)}$$

gdje je α kut između pravaca udaljenosti $\overrightarrow{r}'_1$ i $\overrightarrow{r}'_2$. Budući da je

$$\begin{aligned}
\cos\left(\pi - \alpha\right) &= -\cos\alpha = \frac{r_1'^2 + r_2'^2 - l^2}{2r_1' r_2'} \\
&= \frac{\left(14\,\mathrm{m}\right)^2 + \left(18\,\mathrm{m}\right)^2 - \left(20\,\mathrm{m}\right)^2}{2 \cdot 14\,\mathrm{m} \cdot 18\,\mathrm{m}} = 0.24
\end{aligned}$$

i uz

$$\begin{aligned}
\gamma_{B_1} &= G\frac{m_1}{r_1'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{5\,\mathrm{kg}}{\left(14\,\mathrm{m}\right)^2} = 1.\,7 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
\gamma_{B_2} &= G\frac{m_2}{r_2'^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{2\,\mathrm{kg}}{\left(18\,\mathrm{m}\right)^2} = 0.41 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}
\gamma_B &= \sqrt{1.7^2 + 0.41^2 - 2 \cdot 1.\,7 \cdot 0.41 \cdot \cos\left(\pi - \alpha\right)} \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
&= 1.\,65 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

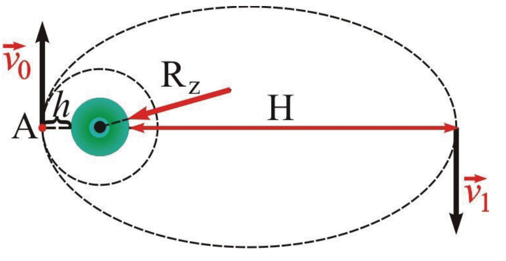
c) Gravitacijski potencijal u nekoj točki gravitacijskog polja mase m_1 i m_2 jednak je algebarskom zbroju potencijala tih polja. Prema tome, gravitacijski potencijal u točki A biti će

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = -6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\left(\frac{5\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{m}} + \frac{2\,\mathrm{kg}}{15\,\mathrm{m}}\right) \\
&= -7.\,56 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

a u točki B

$$\begin{aligned}
\varphi_B &= -G\left(\frac{m_1}{r_1'} + \frac{m_2}{r_2'}\right) = -6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\left(\frac{5\,\mathrm{kg}}{14\,\mathrm{m}} + \frac{2\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{m}}\right) \\
&= -3.\,12 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

Primjer 8.3.15 *Satelit putuje oko Zemlje po kružnoj stazi na visini* $h = 1500\,\mathrm{km}$ *od Zemljine površine (slika 8.10.). Kolika je potrebna promjena brzine ako se želi da satelit opisuje eliptičnu putanju s najvećom udaljenošću od površine Zemlje* $H = 30\ 000\,\mathrm{km}$ *i najmanjom udaljenošću od površine* h*? Koliki će biti period gibanja po toj eliptičnoj putanji? Pretpostavite da se promjena brzine događa u veoma kratkom vremenskom intervalu.*



Slika 8.10.

Rješenje:

Određuju se brzine satelita u točki A (slika 8.10.) na kružnoj putanji (v_0) i na eliptičnoj putanji (v_1). Iz uvjeta da gravitacijska sila mora biti jednaka centrifugalnoj sili imamo:

$$\begin{aligned}
F_G &= F_{cf} \\
G\frac{mM_z}{(R+h)^2} &= \frac{mv_0^2}{R+h} \\
v_0^2 &= G\frac{M_z}{R+h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{G\frac{M_z}{R+h}} \\
&= \sqrt{6.67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot\frac{5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6.37\cdot 10^6\,\mathrm{m}+1.5\cdot 10^6\,\mathrm{m})}} \\
&= 7117\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Iz zakona očuvanja energije za najbližu točku A i najudaljeniju B imamo:

$$\begin{aligned} E_A &= E_B = konst. \\ \frac{m\cdot v_1^2}{2} - G\frac{m\cdot M_z}{R+h} &= \frac{m\cdot v_2^2}{2} - G\frac{m\cdot M_z}{R+H} \end{aligned}$$

i prema drugom Keplerovu zakonu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R+h)\,v_1\Delta t &= \frac{1}{2}(R+H)\,v_2\Delta t \\ v_2 &= v_1\frac{R+h}{R+H} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{m\cdot v_1^2}{2} - G\frac{m\cdot M_z}{R+h} &= \frac{m\cdot v_1^2\cdot\left(\frac{R+h}{R+H}\right)^2}{2} - G\frac{m\cdot M_z}{R+H} \\ \frac{m\cdot v_1^2}{2} - \frac{m\cdot v_1^2\cdot\left(\frac{R+h}{R+H}\right)^2}{2} &= G\frac{m\cdot M_z}{R+h} - G\frac{m\cdot M_z}{R+H} \\ \frac{m\cdot v_1^2}{2}\left[1-\left(\frac{R+h}{R+H}\right)^2\right] &= GmM_z\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R+H}\right) \\ v_1^2 &= 2GM_z\cdot\frac{\frac{H-h}{(R+h)(R+H)}}{\frac{(2R+H+h)(H-h)}{(R+H)^2}} \\ v_1^2 &= \frac{2GM_z\cdot(R+H)}{(2R+H+h)\,(R+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2GM_z}{2R+H+h}\frac{R+H}{R+h}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\right)(6.37+30)\cdot 10^6\,\mathrm{m}}{(2\cdot 6.37+30+1.5)\cdot 10^6\,\mathrm{m}\cdot(6.37+1.5)\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} \\ &= 9126\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

pa je promjena brzine jednaka

$$\Delta v = v_1 - v_0 = 9126\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 7117\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2009\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Po trećem Keplerovom zakonu, koji daje period gibanja po eliptičnoj stazi, vrijedi da se kvadrati ophodnih vremena odnose kao kubovi velikih poluosi eliptičnih putanja.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^2}{T_0^2} &= \frac{R_1^3}{R_0^3} \\
\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 &= \frac{(2R+H+h)^3}{8\,(R+h)^3} \\
T_1^2 &= T_0^2 \cdot \frac{(2R+H+h)^3}{8\,(R+h)^3} \\
&= \pi\left(4.424\cdot 10^7\,\mathrm{m}\right)\sqrt{\frac{4.424\cdot 10^7\,\mathrm{m}}{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} \\
&= 32757\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{h}\;5\,\mathrm{min}\,39\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

što uz relaciju za T_0 i v_0

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 2\pi\cdot\frac{R+h}{v_0} \\
v_0^2 &= G\frac{M_z}{R+h}
\end{aligned}
$$

daje

$$
\begin{aligned}
T_1^2 &= \left(2\pi\cdot\frac{R+h}{v_0}\right)^2\cdot\frac{(2R+H+h)^3}{8\,(R+h)^3} \\
&= 4\pi^2\cdot\frac{(R+h)^2}{v_0^2}\cdot\frac{(2R+H+h)^3}{8\,(R+h)^3} \\
&= \frac{\pi^2}{G\frac{M_z}{R+h}}\cdot\frac{(2R+H+h)^3}{2\,(R+h)} \\
&= \frac{\pi^2\,(2R+H+h)^3}{2GM_z} \\
T_1 &= \pi\cdot\sqrt{\frac{(2R+H+h)^3}{2GM_z}}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.3.16 *Koliki je rad potreban da bi tijelo mase* $m = 100\,\mathrm{kg}$ *s površine Zemlje podigli do točke gdje se gravitacijska polja Zemlje i Mjeseca poništavaju?*

Rješenje:

Ako postavimo os r tako da prolazi kroz središta Zemlje i Mjeseca te ishodište koordinatnog sustava postavimo u središte Zemlje, tada je gravitacijsko polje u prostoru između Zemlje i Mjeseca

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma}_z + \overrightarrow{\gamma}_m = -G\frac{m_z}{r^2}\overrightarrow{r}_0 + G\frac{m_m}{(d-r)^2}\overrightarrow{r}_0$$

gdje je r položaj točke poništavanja gravitacije mjeren od središta Zemlje, a d udaljenost od središta Zemlje do središta Mjeseca.

Gravitacijska polja se poništavaju u točki gdje je ukupno polje jednako nuli

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ G\frac{m_z}{r^2} &= G\frac{m_m}{(d-r)^2} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{m_m}{m_z} &= \frac{(d-r)^2}{r^2} = \left(\frac{d-r}{r}\right)^2 = \left(\frac{d}{r} - 1\right)^2 \\ \frac{d}{r} &= 1 + \sqrt{\frac{m_m}{m_z}} \\ r &= \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_m}{m_z}}} = \frac{3.84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{1 + \sqrt{\frac{7.33 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{5.97 \cdot 10^{27}\,\mathrm{g}}}} \\ &= 3.46 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 0.9d \end{aligned}$$

Prikažimo položaj točke nulte gravitacije i udaljenost središta Zemlje do središta Mjeseca preko polumjera Zemlje, kao i odnos masa Zemlje i Mjeseca

$$\begin{aligned} r &= 54.27R_z \\ d &= 60.28R_z \\ m_z &= 81.5m_m \end{aligned}$$

Potrebni rad jednak je

$$
\begin{aligned}
W &= \Delta E_{p,z} + \Delta E_{p,m} \\
&= \left[m \cdot m_z G \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r}\right)\right] + \left[m \cdot m_m G \left(\frac{1}{d - R_z} - \frac{1}{0.1d}\right)\right] \\
&= Gm \cdot m_m \left[81.5 \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{54.27R_z}\right) + \left(\frac{1}{59.28R_z} - \frac{1}{6.028R_z}\right)\right] \\
&= G\frac{m \cdot m_m}{R_z} \cdot (81.5 \cdot 0.981\,57 - 0.149\,02) \\
&= G\frac{m \cdot m_m}{R_z} \cdot 79.\,85 \\
&= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 7.33 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} \cdot 79.\,85 \\
&= 6.13 \cdot 10^9\,\mathrm{J} = 6.13\,\mathrm{GJ}
\end{aligned}
$$

Primjer 8.3.17 *Na ekvatoru nekog planeta težina tijela je* 20% *manja nego na polu. Srednja gustoća planeta je* $\rho = 4200\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Koliki je period okretanja planeta oko svoje osi?*

Rješenje:

Označima sa G_e težinu tijela na ekvatoru planeta, G_p težinu tijela na polu planeta, R polumjer planeta, m masu tijela, a sa m_p masu planeta. Tada je

$$G_e = G_p - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

gdje je gravitacijska sila između tijela i planeta jednaka

$$G_p = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{R^2}$$

Iz uvjeta zadatka

$$G_e = 0.8 \cdot G_p$$

slijedi

$$\begin{aligned}
0.8 \cdot G_p &= G_p - \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \\
0.2 \cdot G_p &= \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{0.2 \cdot G_p} = \frac{4\pi^2}{\frac{1}{5}} \cdot \frac{m \cdot R}{G\frac{m \cdot m_p}{R^2}} \\
&= 20\pi^2 \cdot \frac{R^3}{G \cdot m_p} = 20\pi^2 \cdot \frac{R^3}{G \cdot \rho_p \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3} = \frac{15\pi}{G \cdot \rho_p} \\
T &= \sqrt{\frac{15\pi}{\rho_p \cdot G}} = \sqrt{\frac{15\pi}{4200\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}} = 12967\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Primjer 8.3.18 *Odredite odnos težina tijela na polu Marsa i na njegovu ekvatoru, ako je masa Marsa $m_m = 6.57 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$, njegov srednji polumjer $R_m = 3397\,\mathrm{km}$, a njegov dan jednak $T_m = 24.63h$.*

Rješenje:

Dijeljenjem izraza za težinu tijela na ekvatoru $F_G^e = F_G^p - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$, s težinom tijela na polu $F_G^p = G\frac{mm_p}{R^2}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{G_e}{G_p} &= 1 - \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2 \cdot G_p} \\
&= 1 - \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2 \cdot G \cdot \frac{m \cdot m_m}{R^2}} \\
&= 1 - \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2 \cdot m_m} \\
&= 1 - \frac{4\pi^2 \cdot \left(3.397 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot (88\ 668\,\mathrm{s})^2 \cdot 6.57 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}} \\
&\simeq 0.9955
\end{aligned}$$

Dakle, tijelo na ekvatoru Marsa je lakše za približno 0.45% nego li na njegovu polu.

Primjer 8.3.19 *Satelit se giba blizu površine planeta gustoće ρ. Koliko je ophodno vrijeme satelita? Koliko je ophodno vrijeme satelita i njegova brzina ako se satelit giba blizu površine Zemlje? Srednja gustoća Zemlje iznosi $\rho_z = 5520\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a srednji polumjer $R_z = 6370\,\mathrm{km}$.*

Rješenje:
Satelit se giba blizu površine pa vrijedi aproksimacija

$$R \approx R + h$$

jer je plomjer planeta $R \gg h$. Po Newtonovu zakonu gravitacije vrijedi

$$\begin{aligned} F_G &= F_{cf} \\ G \cdot \frac{m_s \cdot m_p}{R^2} &= m_s \cdot \omega^2 \cdot R \\ G \frac{m_s \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \rho \cdot R^3}{R^2} &= \frac{4\pi^2 \cdot m_s \cdot R}{T^2} \\ T^2 &= \frac{3\pi}{\rho G} \Longrightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} \end{aligned}$$

U slučaju da se radi o planeti Zemlji imamo

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} = \sqrt{\frac{3\pi}{5520 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}} = 5058.4\,\mathrm{s}$$

pa je brzina satelita jednaka

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{5058.4\,\mathrm{s}} = 7912.4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 8 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

8.4 Zadatci

Problem 8.4.1 *Izračunajte jakost gravitacijskog polja i gravitacijski potencijal Zemlje na visini od* $1000\,\mathrm{km}$ *iznad Zemljine površine, uz pretpostavku da je Zemlja homogena kugla.*

Rezultat: $\gamma_z = 7.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $\varphi = -5.4 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

Problem 8.4.2 *Satelit mase* $m = 1000\,\mathrm{kg}$ *kruži oko Zemlje na visini od* $h = 1000\,\mathrm{km}$*. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.*

Rezultat: $v = 7300\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $T = 6300\,\mathrm{s}$, $E_k = 27\,\mathrm{GJ}$, $E_p = -54\,\mathrm{GJ}$, $E = -27\,\mathrm{GJ}$.

Problem 8.4.3 *Izračunajte silu kojom žica polukružnog oblika polumjera* $r = 1\,\mathrm{m}$*, mase* $m = 10^{-2}\,\mathrm{kg}$ *djeluje na točkastu masu* $m = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ *smještenu u središtu zakrivljenosti kružnice.*

Rezultat: $F = 4.25 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{N}$.

Problem 8.4.4 *Odredite rad potreban za prijenos tijela mase* $m = 100\,\mathrm{kg}$ *s jednog planeta na drugi uz zanemarenje sile otpora. Mase i polumjeri planeta su:* $m_1 = 1.74 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$, $R_1 = 2400\,\mathrm{km}$, $m_2 = 2.85 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ *i* $R_2 = 6100\,\mathrm{km}$.

Rezultat: $W = 2.6\,\mathrm{GJ}$.

Problem 8.4.5 *Izračunajte prvu i drugu kozmičku brzinu za Zemlju i Mjesec.*

Rezultat: $v_1^Z = 7.9\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, $v_2^Z = 11.2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, $v_1^M = 1.7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, $v_2^Z = 2.4\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Problem 8.4.6 *Izračunajte kolika je maksimalna visina h do koje se popne hitac izbačen vertikalno uvis sa površine Mjeseca početnom brzinom* $v = 59\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Polumjer Mjeseca je* $R_m = 1740\,\mathrm{km}$*, a ubrzanje Mječeve sile teže iznosi* $g_m = 1.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*.*

Rezultat: Energija tijela mase m izbačenog uvis početnom brzinom v_0 sa Mjesečeve površine treba se izjednačiti sa gravitacijskom potencijalnom energijom na visini h.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - G \cdot \frac{m \cdot M_m}{R_m} &= -G \cdot \frac{m \cdot M_m}{R_m + h} \\ h &= \frac{v_0^2 \cdot R_m}{2 \cdot g_m \cdot R - v_0^2} \approx 100\,\mathrm{km}\end{aligned}$$