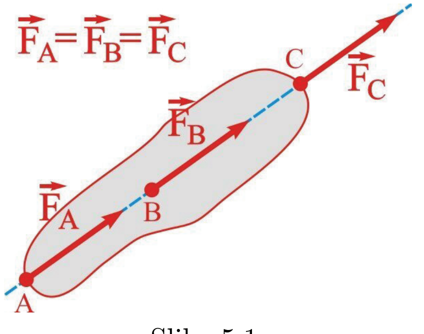
Poglavlje 5

STATIKA

5.1 Osnovni pojmovi i definicije



Slika 5.1.

Statika je dio mehanike koja proučava ravnotežu tijela pod utjecajem sila.

Kada govorimo o statici tijela, onda prije svega mislimo na kruto tijelo. Pod krutim tijelom podrazumijevamo tijelo čija se unutarnja struktura sposobna oduprijeti deformacijama, koje mogu nastupiti prilikom djelovanja vanjskih sila. Ovakvo svojstvo krutog tijela određuje i ponašanje vanjskih sila tako da te sile opisujemo kliznim vektorima.

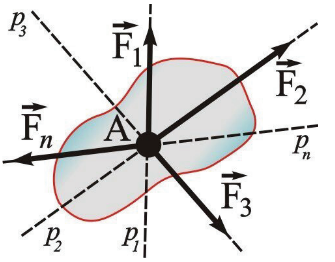
Definicija 5.1.1 *Vanjske sile koje djeluju na kruto tijelo jesu klizni vektori jer se njihovo hvatište smije pomicati uzduž pravca djelovanja, a da se tim djelovanjem sile na tijelo ne promjeni.*

Definicija 5.1.2 *Sustav sila* $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, ..., \overrightarrow{F}_n$ *kojih se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki naziva se sustav konkurentnih sila.*

Posljedica: Konkurentne sile mogu se vektorski zbrojiti u rezultantu silu $\overrightarrow{R}$.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \cdots + \overrightarrow{F}_n \tag{5.1.1}$$

Vidimo na osnovu slike 5.2. da se djelovanje konkurentnih sila svodi na djelovanje sile na materijalnu točku (A). Najjednostavniji slučaj ravnoteže materijalne točke (čestice) kada je zbroj svih sila koje na nju djeluju jednak nuli:



Slika 5.2.

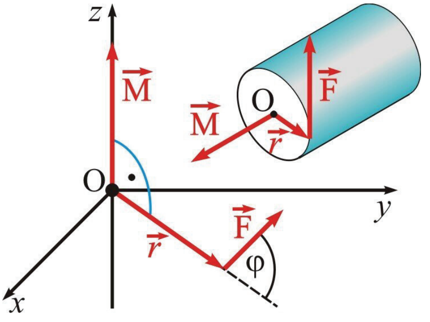
$$\vec{R} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad (5.1.2)$$

Navedena jednadžba predstavlja samo jedan uvjet za ravnotežu i to za konkurente sile. U slučaju da na tijelo djeluju nekonkurente sile pojavljuje se u principu rotacijsko gibanje.

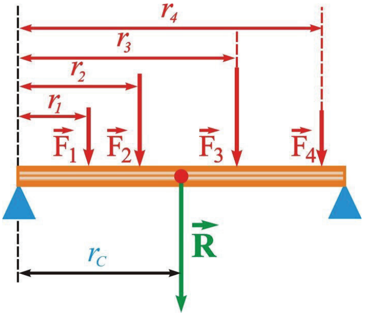
Definicija 5.1.3 *Utjecaj sile na rotaciju tijela opisuje se njezinim momentom sile. Moment sile $\vec{F}$ s obzirom na neku točku O definira se vektorskim umnoškom*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (5.1.3)$$

gdje je $\vec{r}$ – vektor položaja bilo koje točke na pravcu djelovanja sile $\vec{F}$, s obzirom na točku O (slika 5.3.). Tipični primjer ne konkurentnih sila jest djelovanje paralelnih sila.



Slika 5.3.



Slika 5.4.

Djeluje li na kruto tijelo više paralelnih sila (slika 5.4.), tada je iznos njihove rezultante jednak algebarskom zbroju pojedinih sila sustava ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$). Rezultanatna sila ($\vec{R}$) paralelna je sa zadanim silama, a pravac djelovanja prolazi kroz točku određenu vektorom položaja;

$$\overrightarrow{r}_c = \frac{\sum_i \overrightarrow{r}_i \cdot \overrightarrow{F}_i}{\sum_i \overrightarrow{F}_i} \tag{5.1.4}$$

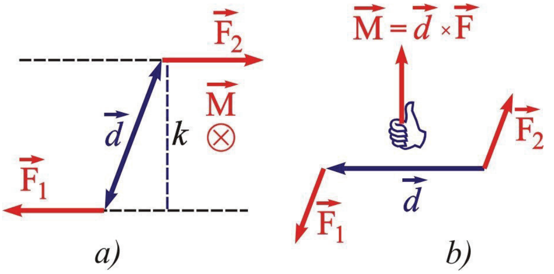
Za naš primjer:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4$$

$$\overrightarrow{R}_c = \frac{\overrightarrow{r}_1 \cdot \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{r}_2 \cdot \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{r}_3 \cdot \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{r}_4 \cdot \overrightarrow{F}_4}{\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4}$$

Postoji slučaj kada je zbroj paralelnih sila jednak nuli:

$$\overrightarrow{R} = 0 \rightarrow \overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2$$



Slika 5.5.

Kada na kruto tijelo djeluje više paralelnih sila čija je rezultanta jednaka nuli, tada se one mogu zamijeniti dvjema paralelnim silama istog iznosa, a suprotnog smjera tj. govorimo o paru sila. Par sila proizvodi samo rotacijsko gibanje. Na osnovu (def.5.3.) možemo izvesti relaciju koja opisuje ovaj sprega sila koji još zovemo momentom para sila.

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{d} \times \overrightarrow{F} \tag{5.1.5}$$

gdje je $\overrightarrow{F}$ jedna od tih sila, a $\overrightarrow{d}$ vektor koji ide od hvatišta druge sile do hvatišta te sile. Koristeći posljedice konkurentnih i nekonkurentnih sila možemo dati opću definiciju ravnoteže nekog krutog tijela.

Definicija 5.1.4 *Tijelo je u statičkoj ravnoteži, ako je ukupan vektorski zbroj sila i ukupan zbroj momenata sila koje djeluje na tijelo jednak nuli:*

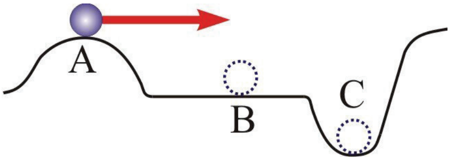
$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0 \tag{5.1.6}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_i = 0 \tag{5.1.7}$$

Posljedica: U ovom slučaju tijelo je u statičkoj ravnoteži i dinamičko stanje možemo opisati kao mirovanje ($\overrightarrow{v} = 0$, $\overrightarrow{\omega} = 0$) ili se kreće stalnom brzinom ($\overrightarrow{v} = const.$, $\overrightarrow{\omega} = const.$) i to onom brzinom kojom se kretalo u trenutku uspostavljanja ravnoteže.

5.2 Problemski zadaci

Problem 5.2.1 *Opisati promjenu vrste ravnoteže kuglice A, prikazane na slici 5.6., kada se ona gurne udesno. U kojoj vrsti ravnoteže će se ona naći na kraju gibanja?*

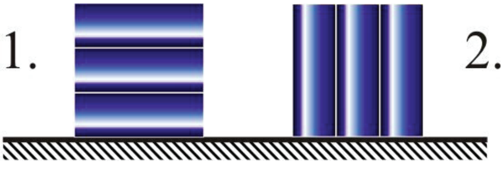


Slika 5.6.

Odgovor:

Razmotrimo situaciju prikazanu na slici 5.6. Kuglica će tijekom gibanja prijeći iz labilne ravnoteže (na vrhu brijega u točki A) u indiferentnu ravnotežu (u horizontalnoj ravnini u točki B), a zatim u stabilnu ravnotežu (na dnu udoline u točki C).

Problem 5.2.2 *Na slici 5.7. su prikazana dva stalka izrađena od jednakih metalnih šipki. Koji od stalaka ima veću stabilnost?*

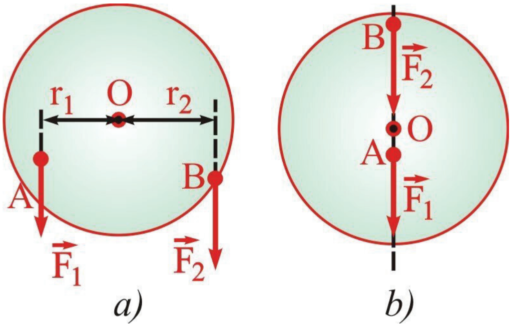


Slika 5.7.

Odgovor:

Metalne šipke su čvrsto povezane jedna za drugu. Težište oba stalka nalaze se na istoj visini u odnosu na oslonac. Nadalje, oba stalka imaju istu površinu dna, odnosno istu površinu koja dodiruje oslonac. Ispunjeni uvjeti daju jednaku stabilnost oba stalka.

Problem 5.2.3 *Vertikalni disk može se okretati oko točke O. U napadnim točkama A i B djeluju sile $\overrightarrow{F}_1$ i $\overrightarrow{F}_2$ prikazane na slici 5.8., pri čemu je $F_1 < F_2$, a $r_1 = r_2$. Budući da je $M_1 \neq M_2$ ovaj sustav nije u ravnoteži. Je li moguće da ovaj sustav bude u ravnoteži (da miruje), a da se pri tome točke objesišta ne promijene? Objasnite odgovor.*



Slika 5.8.

Odgovor:

Da bi disk bio u ravnoteži mora ukupni moment sila biti jednak nuli. To je moguće učiniti jedino na način da okrenemo disk u položaj da točke A, O i B pripadaju istom pravcu (slika 5.8.b), jer je tada

$$r_1 = r_2 = 0$$

pa je i

$$M_1 = M_2 = 0$$

Okretanjem diska u zadani položaj nismo promijenili točke objesišta, nego njihov krak djelovanja sile i time uspjeli izjednačiti momente sile.

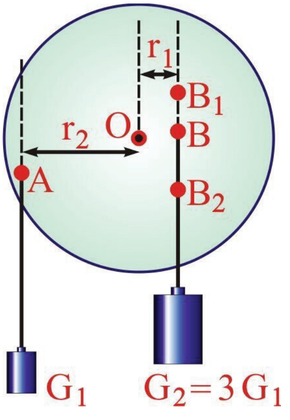
Problem 5.2.4 *Propeler (elisa) zrakoplova rotira oko svoje osi. U kakvoj vrsti ravnoteže se nalazi propeler zrakoplova i gdje je njegovo težište?*

Odgovor:

Elisa zrakoplova je u indiferentnoj ravnoteži, a težište leži na osi rotacije.

Problem 5.2.5 *Disk je postavljen u vertikalni položaj tako da se može okretati oko točke O. U točkama A i B obješeni su utezi G_1 i $G_2 = 3G_1$, vidjeti sliku 5.8.. Kakav odnos rastojanja r_1 i r_2 treba biti da bi disk bio u ravnoteži?*

Odgovor:



Slika 5.9.

Uvjeti ravnoteže su:

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_i = 0$$

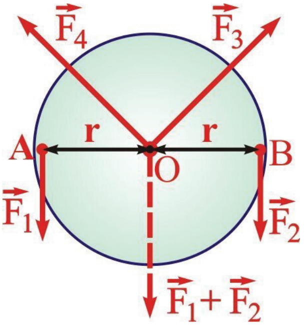
Budući da je $M_1 = M_2$ to slijedi

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = G_1 \cdot r_1 \\ M_2 = G_2 \cdot r_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow G_1 \cdot r_1 = G_2 \cdot r_2$$

odnosno

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{3G_1}{G_1} = 3$$

Problem 5.2.6 *Na slici 5.10. je prikazano tijelo na kojeg djeluju vanjske sile $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$ i $\overrightarrow{F}_4$. Koliki je ukupni moment sila koji djeluje na tijelo? Nalazi li se tijelo u ravnoteži? Objasnite uvjete.*



Slika 5.10.

Odgovor:

Ukupni moment sila za sustav prikazan na slici je

$$\sum_{i=1}^{4} M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

gdje je

$$M_1 = F_1 \cdot r; \qquad M_2 = -F_2 \cdot r$$
$$M_3 = F_3 \cdot 0 = 0; \quad M_4 = F_4 \cdot 0 = 0$$

pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^{4} M_i = F_1 \cdot r - F_2 \cdot r = 0, \text{ jer je } F_1 = F_2$$

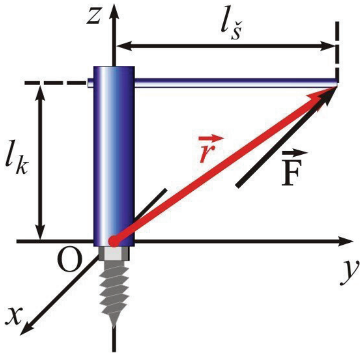
Bez obzira što je ukupni moment jednak nuli, sustav nije u ravnoteži jer nije zadovoljen drugi uvjet za točku O

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = 0$$

što je uvjet ravnoteže za translaciju. Dakle, tijelo ne bi rotiralo, ali bi se gibalo translacijski.

5.3 Primjeri

Primjer 5.3.1 *Na glavu vijka postavimo cjevasti ključ duljine* $l_k = 20\,\mathrm{cm}$. *Kroz rupice na njegovu kraju provučemo željeznu šipku duljine* $l_š = 30\,\mathrm{cm}$ *i na njegovu kraju djelujemo silom od* $F = 300\,\mathrm{N}$ *okomito na cijev i na šipku. Izračunajte moment sile koji odvija vijak?*



Slika 5.11.

Rješenje:

Postavimo ishodište koordinatnog sustava u težištu glave vijka, cjevasti ključ neka leži u pozitivnom smjeru osi z, a željezna šipka pozitivan smjer osi y. Vektor je položaja hvatišta sile jednak

$$\vec{r} = \left(0.3\,\vec{j} + 0.2\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m}$$

Odaberimo smjer sile u negativnom smjeru osi x (sila je pod pretpostavkom zadatka paralelna osi x, a smjer uzimamo proizvoljno), tada je

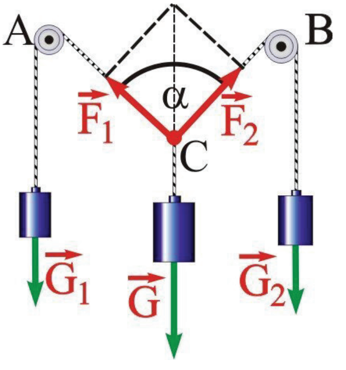
$$\vec{F} = -300\,\vec{i}\,\mathrm{N}$$

Moment sile je

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \left(0.3\,\vec{j} + 0.2\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m} \times \left(-300\,\vec{i}\,\mathrm{N}\right) \\ &= \left(-60\,\vec{j} + 90\,\vec{k}\right)\,\mathrm{N\,m}\end{aligned}$$

Komponenta momenta sile u smjeru z osi $M_z = 90\,\vec{k}\,\mathrm{N\,m}$ uvija cijev i nastoji odviti (desni) vijak. Moment sile u y smjeru $M_y = -60\,\vec{j}\,\mathrm{N\,m}$ nastoji saviti cjevasti ključ.

Primjer 5.3.2 *Na krajevima niti prebačenih preko kolotura, obješena su utezi težina $G_1 = 120\,\mathrm{N}$ i $G_2 = 150\,\mathrm{N}$. Kolika je težina trećeg utega koji se mora objesiti u točki C da bi sustav bio u ravnoteži? Kut u točki C iznosi $\alpha = 90°$.*



Slika 5.12.

Rješenje:

Za ravnotežu sustava mora vrijediti

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

što za točku C daje

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$$

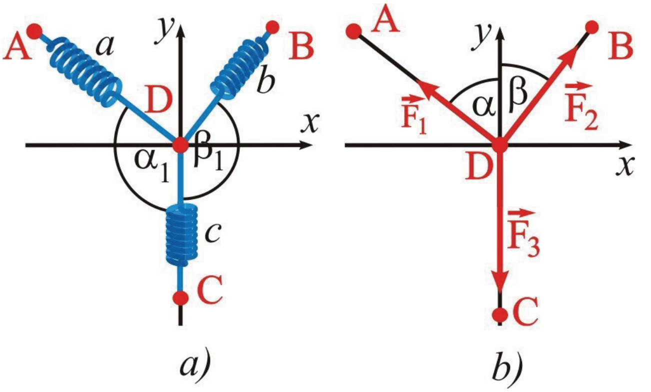
Za parcijalne sustave na koloturama vrijedi:

$$\begin{array}{ll} \text{kolotur A} & 0 = \vec{F}_1 + \vec{G}_1 \\ \text{kolotur B} & 0 = \vec{F}_2 + \vec{G}_2 \\ \text{kolotur C} & 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} \end{array}$$

U točki C je kut $\alpha = 90°$ pa jednadžbu možemo pisati u skalarnom obliku:

$$G = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = \sqrt{(120\,\mathrm{N})^2 + (150\,\mathrm{N})^2} = 192.09\,\mathrm{N}$$

Primjer 5.3.3 *Tri užeta su vezana u jednom kraju u točki D, a u drugom kraju su vezana za opruge a, b i c. Kada se opruge zategnu i pričvrste u točkama A, B i C izmjere se slijedeće vrijednosti zategnutosti opruga: u smjeru AD sila iznosa $F_1 = 30\,\mathrm{N}$, u smjeru BD sila* *iznosa* $F_2 = 40\,\mathrm{N}$ *i u smjeru* CD *sila iznosa* $F_3 = 50\,\mathrm{N}$. *Izračunajte vrijednost kuta* α *između opruga* a *i* c *te vrijednost kuta* β *između opruga* b *i* c.



Slika 5.13.

Rješenje:

Ove tri opruge definiraju ravninu xy pa pretpostavimo da opruga c ima smjer negativne osi y. Nadalje, tražene kuteve označimo sa α_1- kut između opruga a i c, a sa β_1- kut između opruga b i c (slika 5.13.a). Točka D se može smatrati materijalnom točkom u kojoj djeluju tri sile koje su u ravnoteži, dakle

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = 0$$

Postavljajući ishodište koordinatnog sustava u točku D tako da smjer AD sa pozitivnim smjerom osi y zatvara kut α i smjer BD kut β te ako sile razložimo na komponente (slika 5.13.b), uvjet ravnoteže pišemo u obliku

$$\begin{aligned}\sum_i F_x &= -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = 0 \\ \sum_i F_y &= F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - F_3 = 0\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}-30\sin\alpha + 40\sin\beta &= 0 \\ 30\cos\alpha + 40\cos\beta &= 50\end{aligned}$$

odnosno

$$\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$$

Rješavanjem jednadžbi dobivamo

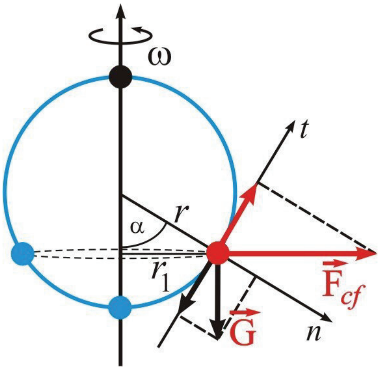
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 0.8 \Longrightarrow \alpha = \arcsin 0.8 = 53.13^\circ\\ \sin\beta &= 0.6 \Longrightarrow \beta = \arcsin 0.6 = 36.87^\circ\end{aligned}$$

Pa je

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 180 - \alpha = 180 - 53.13 = 126.87^\circ\\ \beta_1 &= 180 - \beta = 180 - 36.87 = 143.13^\circ\end{aligned}$$

Primjer 5.3.4 *Kružnica polumjera $r = 1\,\mathrm{m}$ nalazi se u okomitoj ravnini i kruži oko svog okomitog promjera konstantnom kutnom brzinom $\omega = 3\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Tijelo mase m može se gibati duž kružnice bez trenja. Položaj je tijela na kružnici određen kutom α. Za koje kutove α će se tijelo naći u ravnotežnom položaju i uz koje uvjete?*

Rješenje:



Slika 5.14.

Da bi se tijelo nalazilo u ravnotežnom položaju komponenta ukupne sile u smjeru tangente na kružnicu (tangencijalna komponenta) mora biti jednaka nuli. Na tijelo djeluje sila teže i centrifugalna sila. Tangencijalne komponente su

$$F_T = -mg\sin\alpha + m\omega^2 r_1\cos\alpha$$

gdje je $r_1 = r\sin\alpha$ polumjer kružnice po kojem se giba tijelo u horizontalnoj ravnini. Odavde je

$$\begin{aligned}F_T &= -mg\sin\alpha + m\omega^2 r\sin\alpha\cos\alpha\\ &= m\sin\alpha\left(\omega^2 r\cos\alpha - g\right) = 0\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su:

$$\begin{aligned}0 &= \sin\alpha \Longrightarrow \alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = \pi\\ 0 &= \omega^2 r\cos\alpha - g \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 r}\end{aligned}$$

Prva dva rješenja su zapravo minimalni i maksimalni položaji na kružnici. Budući da je $|\cos\alpha| \leq 1$, mora biti ispunjen uvjet $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}}$ što je u zadatku i ispunjeno

$$3\pi > \sqrt{9.81} = 3.1321$$

Treće moguće rješenje je

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$$

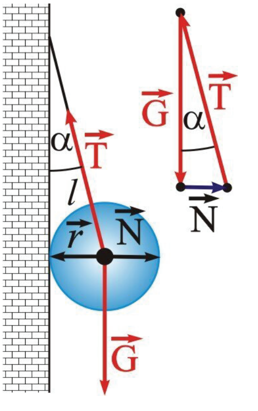
odakle za kut α dobivamo

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \arccos\frac{g}{\omega^2 r} = \arccos\left[\frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{(3\pi\,\mathrm{s}^{-1})^2\cdot 1\,\mathrm{m}}\right]\\ &= \arccos 0.11 = \pm 83.66^\circ = \pm 1.46\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Primjer 5.3.5 *Željezna kugla mase $m = 5\,\mathrm{kg}$ visi na užetu duljine $l = 0.15\,\mathrm{m}$ koje je pričvršćeno na glatki vertikalni zid. Odredi kut α između užeta i zida, silu kojom kugla pritišće zid $\overrightarrow{N}$ i napetost užeta $\overrightarrow{T}$.*

Rješenje:

Na kuglu djeluju tri sile: sila teže u težištu kugle vertikalno nadolje, reakcija zida u horizontalnom smjeru i napetost užeta pod kutom α u odnosu na vertikalu. Iz uvjeta statičnosti u odnosu na translaciju



Slika 5.15.

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} = 0$$

slijedi, po komponentama

$$\begin{aligned}N - T\sin\alpha &= 0\\ G - T\cos\alpha &= 0\end{aligned}$$

Iz uvjeta statičnosti u odnosu na rotaciju

$$\sum_i \overrightarrow{M}_i = 0$$

za težište kugle S, dobivamo da moment napetosti užeta $\overrightarrow{M}^S_{\overrightarrow{T}}$ mora biti jednako nuli, jer su i momenti težine $\overrightarrow{G}$ i reakcije zida $\overrightarrow{N}$ jednaki nuli. Dakle, pravac napetosti niti prolazi kroz središte (težište) kugle. Zapravo, sile $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{N}$ i $\overrightarrow{T}$ su konkurentne sile u jednoj ravnini. Prikažemo li ih trokutom, dobivamo kut α pomoću

$$\tan\alpha = \frac{r}{\sqrt{(l+r)^2 - r^2}}$$

gdje je r polumjer kugle, koji dobivamo iz

$$\begin{aligned} m &= \rho_{Fe}\cdot V = \rho_{Fe}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho_{Fe}}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 5\,\mathrm{kg}}{4\pi\cdot 7900\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 0.0533\,\mathrm{m} = 5.33\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

pa je α

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\frac{r}{\sqrt{(l+r)^2 - r^2}} \\ &= \arctan\left[\frac{5.33\,\mathrm{cm}}{\sqrt{(15\,\mathrm{cm}+5.33\,\mathrm{cm})^2 - (5.33\,\mathrm{cm})^2}}\right] \\ &= \arctan 0.27 = 15.19^\circ = 15^\circ 11' \end{aligned}$$

Napetost niti je

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 5.52} = 49.28\,\mathrm{N}$$

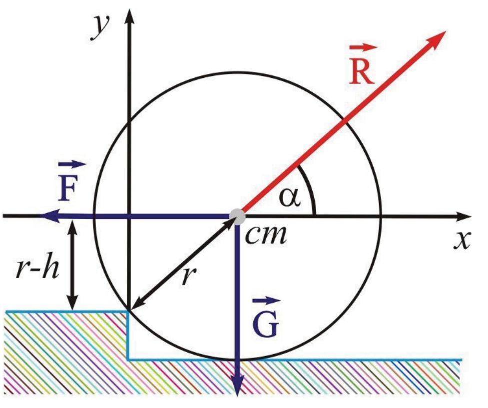
Sila kojom kugla pritišće zid jednaka je reakciji zida na kuglu i iznosi

$$N = T\sin\alpha = G\tan\alpha = mg\cdot\tan 5.52 = 4.74\,\mathrm{N}$$

Primjer 5.3.6 *Kotač, mase $m = 20\,\mathrm{kg}$ i polumjera $r = 0.7\,\mathrm{m}$, na vodoravnoj podlozi nailazi na pravokutnu prepreku visine $h = 0.25\,\mathrm{m}$. Izračunajte vodoravnu silu $\overrightarrow{F}$ kojom treba djelovati na os kotača da bi se svladala postavljena prepreka.*

Rješenje:

Kada je sila $\overrightarrow{F}$ dovoljnog inteziteta da savlada postavljenu prepreku, kotač više neće pritiskati vodoravnu podlogu, nego samo vrh postavljene prepreke. Dakle na kotač će djelovati samo tri sile i to: vodoravna sila $\overrightarrow{F}$, težina kotača $\overrightarrow{G}$ i reakcija vrha prepreke $\overrightarrow{R}$ koje su u ravnoteži. Zbog toga ove tri sile leže u istoj ravnini. Odaberimo koordinatni sustav tako da os x leži u horizontalnoj ravnini, a os y vertikalno prema gore. Iz uvjeta ravnoteže u odnosu na translaciju imamo:



Slika 5.16.

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = 0$$

što po koordinatama daje

$$\sum_i F_{x_i} = R\cos\alpha - F = 0$$
$$\sum_i F_{y_i} = R\sin\alpha - G = 0$$

odakle slijedi da je

$$F = G\cot\alpha$$

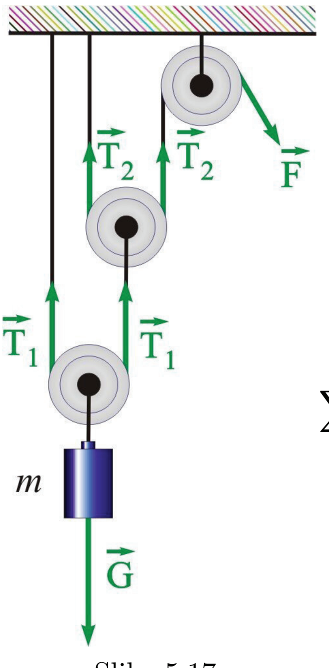
gdje je α - kut koji sila $\overrightarrow{R}$ zatvara sa x osi. Iz slike se vidi da je za $\cot\alpha$:

$$x = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{x}{r-h} = \sqrt{\left(\frac{r}{r-h}\right)^2 - 1}$$

pa je tražena horizontalna sila jednaka

$$\begin{aligned} F &= G\sqrt{\left(\frac{r}{r-h}\right)^2 - 1} = mg\sqrt{\left(\frac{r}{r-h}\right)^2 - 1} \\ &= 20\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\sqrt{\left(\frac{0.7\,\mathrm{m}}{0.7\,\mathrm{m} - 0.25\,\mathrm{m}}\right)^2 - 1} = 233.78\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 5.3.7 *Odredite silu F koja uravnotežuje težinu tijela mase $m = 100\,\mathrm{kg}$ na sustavu kolotura (slika 5.17.), zanemarivši masu kolotura i trenje.*



Slika 5.17.

Rješenje:

Iz uvjeta ravnoteže translacije za prvi kolotur imamo

$$\sum_i F_{1_i} = T_1 + T_1 - G = 0 \Longrightarrow T_1 = \frac{G}{2}$$

Na drugi kolotur prema dolje djeluje napetost niti T_1, a prema gore u svakoj grani užeta napetosti niti T_2 pa iz uvjeta ravnoteže translacije imamo

$$\sum_i F_{2_i} = T_2 + T_2 - T_1 = 0 \Longrightarrow T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{G}{4}$$

sila F koja uravnotežuje težinu tereta (u koloturi 3, po uvjetu ravnoteže translacije) je

$$\sum_i F_{3_i} = T_2 - F = 0$$

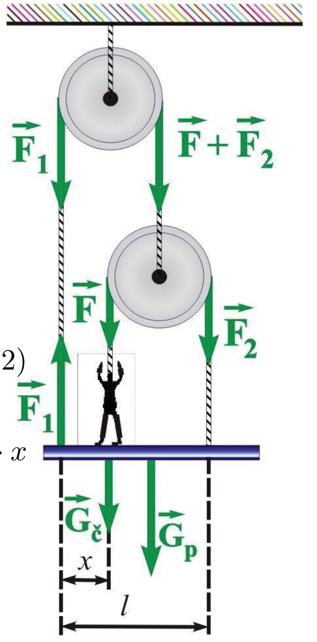
a ona iznosi

$$F = T_2 = \frac{G}{4} = \frac{mg}{4} = \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4} = 245.25\,\mathrm{N}$$

Primjer 5.3.8 *Čovjek mase $m_č = 75\,\mathrm{kg}$ stoji na platformi mase $m_p = 50\,\mathrm{kg}$ (slika 5.18.). Duljina platforme iznosi $l = 3\,\mathrm{m}$. Kolikom silom čovjek mora djelovati na kraj užeta i na kojem mjestu mora stajati da bi sustav bio u ravnoteži? Trenje u koloturama zanemarite.*

Rješenje:

Neka se čovjek nalazi na udaljenosti x, u točki A, od lijevog kraja platforme i neka je sila kojom čovjek povlači uže F. Sila kojom čovjek djeluje na platformu iznosi $G_č - F$ (gdje je $G_č$ - težina čovjeka).



Slika 5.18.

Promotrimo sile koje djeluju na platformu. Neka su u užadima napetosti niti F_1 i F_2. Tada po uvjetu ravnoteže na translacijsko gibanje u točki A dobivamo

$$(G_č - F) + G_p - F_1 - F_2 = 0 \quad (5.3.1)$$

$$F_1 + F_2 = G_č - F + G_p$$

Uvjet ravnoteže na rotaciju daje

$$\begin{aligned} \sum_i M_i &= 0 \qquad (5.3.2) \\ 0 &= F_2 \cdot (l - x) - G_p \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - F_1 \cdot x \end{aligned}$$

gdje je G_p - težina platforme.

U ravnoteži ukupni momenti sila na pojedine koloture moraju biti jednaki nuli, što daje jednadžbe

$$\begin{aligned} F_2 &= F \\ F_1 &= F + F_2 = 2 \cdot F \end{aligned}$$

nakon uvrštenja u jednadžbu (5.3.1) dobivamo

$$2 \cdot F + F = G_č - F + G_p$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4}(G_č + G_p) = \frac{1}{4}(m_č \cdot g + m_p \cdot g) \\ &= \frac{1}{4} g \cdot (m_č + m_p) = \frac{1}{4} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (75\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}) \\ &= 306.56\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Jednadžba (5.3.2) daje

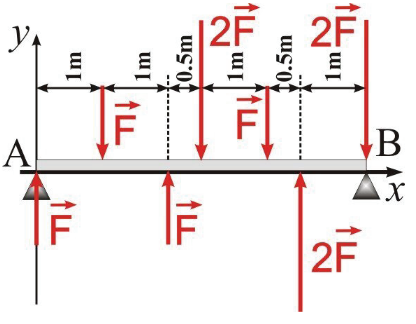
$$0 = F \cdot (l - x) - G_p \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - 2 \cdot F \cdot x$$

odnosno

$$(3F - G_p) \cdot x = \left(F - \frac{1}{2} G_p\right) \cdot l$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left(F - \frac{1}{2}G_p\right)}{(3F - G_p)} \cdot l = \frac{\frac{1}{4}G_{\check{c}} + \frac{1}{4}G_p - \frac{1}{2}G_p}{\frac{3}{4}G_{\check{c}} + \frac{3}{4}G_p - G_p} \cdot l \\ &= \frac{G_{\check{c}} - G_p}{3G_{\check{c}} - G_p} \cdot l = \frac{m_{\check{c}} - m_p}{m_{\check{c}} - 3m_p} \cdot l \\ &= \frac{75\,\mathrm{kg} - 50\,\mathrm{kg}}{3 \cdot 75\,\mathrm{kg} - 50\,\mathrm{kg}} \cdot 3\,\mathrm{m} = 0.4285\,\mathrm{m} = 42.85\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Primjer 5.3.9 *Odredite rezultantu sustava paralelnih sila (slika 5.19.) koje djeluju na gredu duljine $l = 5\,\mathrm{m}$. Koliki je ukupni moment koji djeluje na gredu u točki A?*



Slika 5.19.

Rješenje:

Odabere li se koordinatni sustav sa ishodištem u točki A (slika 5.19.) i pozitivnim smjerom u smjeru osi y. Prema definiciji rezultanta je jednaka

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} - \vec{F} + \vec{F} - 2\vec{F} - F + 2\vec{F} - 2\vec{F} \\ &= -2\vec{F} = -2F\vec{j} = -10\,\mathrm{N}\,\vec{j} \end{aligned}$$

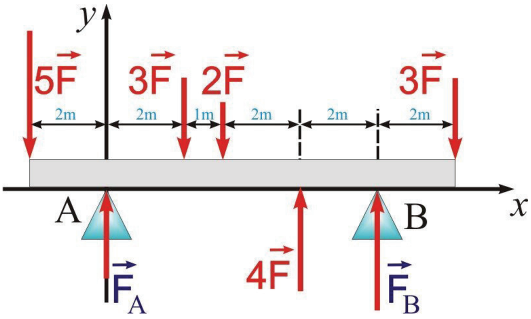
gdje je $\vec{j}$ jedinični vektor usmjeren prema gore. Položaj rezultantne sile se dobiva iz izraza

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot F_i}{\sum_i F_i} \\ &= \frac{-1 \cdot F + 2 \cdot F - 2.5 \cdot 2F - 3.5 \cdot F + 4 \cdot 2F - 5 \cdot 2F}{-2 \cdot F} \cdot \vec{i}\ \mathrm{m} \\ &= \left(\frac{-7F}{-2F}\,\mathrm{m}\right)\vec{i} = (3.5\,\mathrm{m})\,\vec{i} \end{aligned}$$

Moment u točki A jednak je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_A &= \sum_i \overrightarrow{M}_{A_i} = \sum_i \overrightarrow{r}_i \times \overrightarrow{F}_i \\
&= \left[\overrightarrow{i} \times (-F) \cdot \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{i} \times F\overrightarrow{j} - 2.5\overrightarrow{i} \times 2F\overrightarrow{j}\right] \mathrm{N\,m} \\
&\quad + \left[-3.5\overrightarrow{i} \times F\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{i} \times 2F\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{i} \times 2F\overrightarrow{j}\right] \mathrm{N\,m} \\
&= -7F\ \overrightarrow{k}\,\mathrm{N\,m} = -35\,\mathrm{N\,m}
\end{aligned}$$

Primjer 5.3.10 *Na gredu djeluju sile kao što je označeno na slici 5.20.. Ako je greda u ravnoteži izračunajte kolike su reakcije oslonaca u točkama A i B?*



Slika 5.20.

Rješenje:

Iz uvjeta za translacijsku ravnotežu

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0$$

za os y imamo

$$\begin{aligned}
\sum_i F_{y_i} &= -5F + F_A - 3F - 2F + 4F + F_B - 3F = 0 \\
F_A + F_B &= -9F
\end{aligned}$$

Uvjet za rotacijsku ravnotežu

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{A_i} = 0$$

možemo primjeniti na proizvoljnu točku grede, ali najbolje je primjeniti u nekim karakterističnim točkama, npr. primjena u točki A eliminira jednu nepoznanicu u jednadžbama (reakciju oslonca A) pa imamo

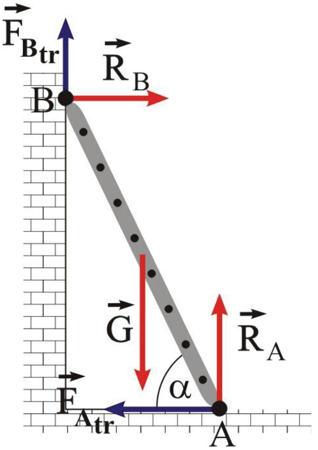
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left[(10F - 6F - 6F + 20F + 7F_B - 27F)\,\vec{k}\right]\,\mathrm{N\,m} = 0$$

$$7F_B = 29F \Longrightarrow F_B = \frac{29}{7}F$$

pa je

$$F_A = -9F - F_B = -9F - \frac{29}{7}F = -\frac{92}{7}F$$

Primjer 5.3.11 *Homogene ljestve duljine l i mase $m = 2.5\,\mathrm{kg}$ naslonjene su na gladak zid ($\mu_B = 0$) i na hrapavu podlogu ($\mu_A = 0.35$). Pod kojim kutom α ljestve mogu stajati naslonjene na zid? Zadatak riješite, ali tako da postoji i trenje na zidu uz koeficijent trenja ($\mu_B = 0.1$).*



Slika 5.21.

Rješenje:

Ljestve stoje, dakle $\vec{v} = 0$. Prema uvjetu ravnoteže na translaciju je

$$\sum_i F_{y_i} = R_A - G = R_A - mg = 0$$

$$R_A = mg = 2.5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 24.52\,\mathrm{N}$$

$$\sum_i F_{x_i} = R_B - F_{A_{tr}} = 0$$

$$R_B = F_{A_{tr}} = \mu_A \cdot R_A = \mu_A \cdot mg = 0.35 \cdot 2.5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 8.58\,\mathrm{N}$$

Također, oko točke A po uvjetu na rotaciju

$$\sum_i M_{A_i} = mg \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha - R_B \cdot l\cos\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{2 \cdot R_B}{mg} = \frac{2\mu_A \cdot mg}{mg} = 2\mu_A$$

odakle je maksimalni kut pri kojem mogu stajati ljestve

$$\alpha \leq \arctan 2\mu_A = \arctan 0.7 = 35^\circ \approx 0.61\,\mathrm{rad}$$

Ako uzmemo i trenje na zidu dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_i F_{x_i} &= R_A - mg + F_{B_{tr}} = 0 \\
R_A &= mg - F_{B_{tr}} \\
\sum_i F_{y_i} &= R_B - F_{A_{tr}} = 0 \\
R_B &= F_{A_{tr}}
\end{aligned}$$

oko točke A po uvjetu na rotaciju sada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_i M_{A_i} &= mg \cdot \frac{l}{2} \sin\alpha - R_B \cdot l\cos\alpha - F_{B_{tr}} \cdot l \sin\alpha = 0 \\
\tan\alpha &= \frac{R_B \cdot l}{mg \cdot \frac{l}{2} - F_{B_{tr}} \cdot l} = \frac{2 \cdot R_B}{mg - 2 \cdot F_{B_{tr}}} \qquad (5.3.3)
\end{aligned}$$

sile trenja su

$$\begin{aligned}
F_{A_{tr}} &= \mu_A \cdot R_A = R_B \\
F_{B_{tr}} &= \mu_B \cdot R_B = \mu_B \cdot F_{A_{tr}} = \mu_A \mu_B \cdot R_A
\end{aligned}$$

što uvršteno u jednadžbu (5.3.3) daje

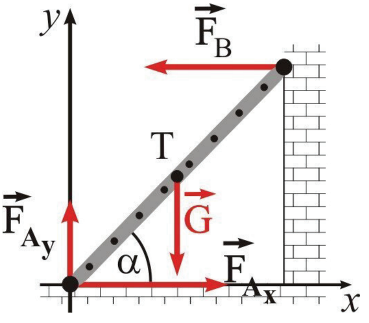
$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{2 \cdot R_B}{mg - 2 \cdot F_{B_{tr}}} = \frac{2 \cdot R_B}{R_A - F_{B_{tr}}} = \frac{2\mu_A \cdot R_A}{R_A - \mu_A\mu_B \cdot R_A} \\
&= \frac{2\mu_A}{1 - \mu_A\mu_B} \\
\alpha &\geq \arctan\frac{2\mu_A}{1 - \mu_A\mu_B} = \arctan 0.73 \approx 35.96^\circ
\end{aligned}$$

Primjer 5.3.12 *Ljestve mase* $m = 10\,\text{kg}$ *prislonjene su uz vertikalni zid (slika 5.22.). Odredite sile koje djeluju u točkama* A *i* B*. Pretpostavimo da je trenje u točki* B *zanemarivo.*

Rješenje:

Sile koje djeluju na ljestve su: normalna reakcija zida u točki B, normalna reakcija poda u točki A, sila teže $G = mg$ koja djeluje u težištu ljestava i sila trenja koja se odupire klizanju ljestava. Uvjeti ravnoteže u odnosu na rotaciju

$$\sum_i M_i = 0$$



Slika 5.22.

što za točku A daje

$$\sum_i M_{A_i} = G \cdot T_x - F_B \cdot B_y = 0$$

kako je $B_y = 2T_x$ slijedi

$$F_B = \frac{G}{2} = 49.05\,\mathrm{N}$$

a u odnosu na translaciju su

$$\begin{aligned}
\sum_i F_{x_i} &= -F_B + F_{A_x} = 0 \implies F_{A_x} = F_B = \frac{G}{2} = 49.05\,\mathrm{N} \\
\sum_i F_{y_i} &= -G + F_{A_y} = 0 \implies F_{A_y} = G = 98.1\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

5.4 Zadatci

Problem 5.4.1 *U točki* $A\,(1\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ *djeluju dvije sile zadane izrazima* $\overrightarrow{F}_1 = \left(3\,\overrightarrow{i}\right)$ N *i* $\overrightarrow{F}_2 = \left(-\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j}\right)$ N. *Izračunajte rezultantni moment tih sila s obzirom na ishodište.*

Rezultat: $\overrightarrow{M} = \left(3\,\overrightarrow{k}\right)$ N m

Problem 5.4.2 *Na vodoravnoj gredi dugoj* $12\,\mathrm{m}$ *mase* $m = 100\,\mathrm{kg}$ *nalazi se valjak mase* $m_v = 200\,\mathrm{kg}$ *udaljen* $3\,\mathrm{m}$ *od jednog njezinog kraja. Greda je podupрта na krajevima tako da je sila reakcije oslonca okomita na gredu. Kolike su sile reakcije?*

Rezultat: $F_A = 1960\,\mathrm{N}$, $F_B = 980\,\mathrm{N}$.

Problem 5.4.3 *Homogeni je štap naslojen na gladak zid i nalazi se na hrapavom podu. Ako štap zatvara kut od* $\alpha = 45^\circ$ *s podlogom i ako mu je masa* $m = 10\,\mathrm{kg}$, *koliko je bilo trenje između štapa i poda?*

Rezultat: $F_{tr} = 49.1\,\mathrm{N}$.

Problem 5.4.4 *Dugačke ljestve mase* $m = 40\,\mathrm{kg}$ *naslonjene su jednim svojim krajem na okomiti zid po kojemu mogu kliziti bez trenja, a drugim krajem na površinu zemlje pod kutom od* $\alpha = 60^\circ$. *Koliko mora iznositi minimalni koeficijent trenja između ljestava i površine zemlje da bi čovjek težak* $m_č = 80\,\mathrm{kg}$ *mogao stajati na vrhu ljestava, a da one ne kližu?*

Rezultat: $\mu = 0.48$

Poglavlje 6

INERCIJSKI I NEINERCIJSKI SUSTAVI

6.1 Osnovni pojmovi i definicije

Opisivanje gibanja tijela koje se vlada prema I. Newtonovom zakonu (vidi definiciju I. Newtonova zakona) zahtjeva odabiranje koordinatnog sustava u kojem se taj zakon ostvaruje.

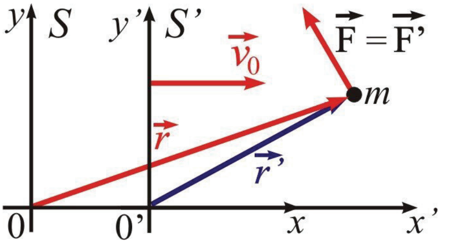
Definicija 6.1.1 *Koordinatni sustav u kojem vrijedi zakon inercije naziva se inercijski sustav.*

Posljedica: Inercijski koordinatni sustavi međusobno miruju ili se gibaju jednoliko pravocrtno.

Definicija 6.1.2 *Dva inercijska sustava S i S' povezana su Galilejevim transformacijama :*

$$
\begin{aligned}
x &= x'_0 + v_0 t,\; y = y',\;\; z = z' \\
v_x &= v'_x + v_0,\; v_y = v'_y,\; v_z = v'_z \\
a &= a',\; t = t'
\end{aligned}
$$

Posljedica: Galilejeve transformacije su geometrijske transformacije translacije. Kinematički i dinamički oblik zakona ne ovisi o mjestu promatranja, tj. koordinatni sustavi su ekvivalentni. Kažemo da su fizikalni zakoni invarijantni u odnosu na Galilejeve transformacije.



Slika 6.1.

Definicija 6.1.3 *Koordinatni sustavi u kojima ne vrijedi zakon inercije nazivaju se neinercijski sustavi.*

Posljedica: Svi ubrzani sustavi su neinercijski sustavi.

U neinercijskom sustavu II. Newtonov zakon glasi:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}'$$

gdje je $\vec{F}-$ rezultantna vanjska sila, a $\vec{F}_i-$ rezultantna inercijska sila. Ubrzava li se neinercijski sustav S' prema inercijskom sustavu S akceleracijom $\vec{a}_i$, tada na tijelo mase m djeluje inercijska sila

$$\vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_i$$

koju ne uzrokuje djelovanje drugih tijela, već je posljedica toga ubrzani sustav. Kada sustav S' rotira kutnom brzinom ω, na materijalnu točku mase m djeluje inercijska centrifugalna sila

$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}'$$

gdje je $\vec{r}'-$ vektor od ishodišta sustava S' do materijalne točke.

Giba li se tijelo brzinom $\vec{v}'$ s obzirom na rotirajući sustav, na njega uz centrifugalnu silu, djeluje i Coriolisova sila

$$\vec{F}_{Cor} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

D'Alambertov princip - napišemo li jednadžbu gibanja sa

$$m \cdot \vec{a} = \sum_k \vec{F}_k$$

u obliku

$$\sum_k \overrightarrow{F}_k - m \cdot \overrightarrow{a} = 0$$

pa umjesto $m \cdot \overrightarrow{a}$ pišemo $\overrightarrow{F}_i$, dobivamo jednadžbu dinamičke ravnoteže

$$\sum_k \overrightarrow{F}_k - \overrightarrow{F}_i = 0$$

Na ovaj način smo jednadžbu gibanja dinamike formalno preveli u jednadžbu uvjeta ravnoteže statike. Formalnim dodavanjam inercijskih sila stvarnima, dinamički se problem svodi na statički. To je D'Alambertov princip kojim se primjenom metode statike rješavaju problemi dinamike.

6.2 Problemski zadaci

Problem 6.2.1 *Pretpostavimo da automobil predstavlja referentni sustav. U kojim slučajevima automobil predstavlja inercijski referentni sustav? Napomena: Pretpostavimo da Zemlja miruje. Zašto?.*

a) Automobil miruje na putu.

b) Automobil se giba konstantnom brzinom $v = 80\frac{\text{km}}{h}$ po pravcu.

c) Automobil se giba brzinom $v = 80\frac{\text{km}}{h}$ po udubljenom putu.ž

d) Automobil se giba brzinom $v = 80\frac{\text{km}}{h}$ po kružnoj stazi.

Odgovor:

Inercijski referentni sustav je u slučajevima a) i b), dok su u slučajevima c) i d) to neinercijski sustavi, jer su to ubrzani sustavi, tj. $\overrightarrow{v} \neq const.$. Potrebno je pretpostaviti da Zemlja miruje, jer u realnim uvjetima ona vrši rotacijsko gibanje (iako malom kutnom brzinom), tako da ni automobil koji se nalazi na površini Zemlje ne bi mogli promatrati kao inercijski sustav.

Problem 6.2.2 *U sustavu S', koji se giba konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}$ u odnosu na sustav S, tijelo slobodno pada iz točke A' u točku B'. Za promatrača (slika 6.2.a) koji se nalazi u sustavu S ovaj događaj je:*

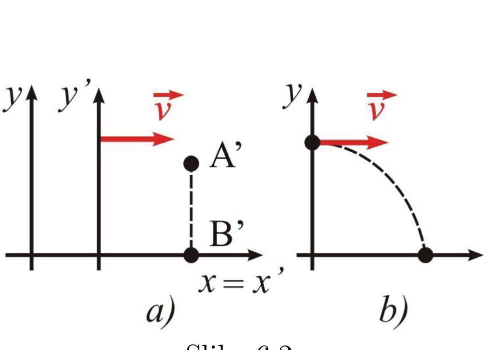
a) slobodni pad,

b) horizontalni hitac,

c) kosi hitac. Objasni odgovor.

Odgovor:

Događaj je horizontalni hitac jer za sustav S tijelo ima i horizontalnu brzinu $\overrightarrow{v}$ sustava S' (u kojem se nalazi), tako da je to složeno gibanje sastavljeno od slobodnog pada u sustavu S' i jednolikog pravocrtnog

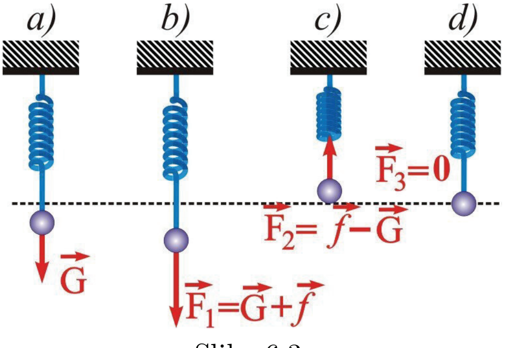


Slika 6.2.

gibanja brzinom $\overrightarrow{v}$ kojim se giba sustav S'.

Da je sustav S' imao i vertikalnu komponentu brzine (uz postojeću horizontalnu) događaj bi bio opisan u sustavu S kao kosi hitac.

Problem 6.2.3 *U nekom sustavu se nalazi opruga o koju je obješeno tijelo mase m i koje ima težinu $G = mg$. U kojem stanju se nalazi sustav (inercijskom ili neinercijskom) ako je stanje opruge prikazano na slici 6.3.:*



Slika 6.3.

Odgovor:

a) Inercijski sustav.

Budući da je $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ sustav miruje ili se giba konstantnom brzinom.

b) Neinercijski sustav.

Sila zatezanja je $\overrightarrow{F}_1 \neq \overrightarrow{G}$, tj. $\overrightarrow{F}_1 = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{f}$, što znači da se sustav giba ubrzano pod djelovanjem sile $\overrightarrow{f}$ prema gore.

c) Neinercijski sustav.

Kako je $\overrightarrow{F}_2 \neq \overrightarrow{G}$, tj. $\overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{G}$, i to $f > G$, što znači da se sustav giba ubrzano prema dolje.

d) Nije određeno.

Sustav može biti inercijski ako nije prisutno gravitacijsko polje, tj. $\overrightarrow{F}_3 = \overrightarrow{G} = 0$, ili neinecijski, tj. da sustav "pada" ubrzanjem g, tj. $\overrightarrow{F}_3 = \overrightarrow{G} - \overrightarrow{f}$, pri čemu je $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{G}$.

Problem 6.2.4 *Promatrajmo dva svemirska broda sa astronautima. Jedan od njih se giba prvom kozmičkom brzinom (rotira oko Zemlje), a drugi svemirski brod se nalazi negdje u svemiru „daleko" od nebeskih tijela. Odgovorite na slijedeća pitanja:*

a) U kakvom se dinamičkom stanju nalaze astronauti?

b) Pretpostavimo li da svemirski brod predstavlja referentni sustav, o kakvim je sustavima riječ?

Napomena: pretpostavimo da su pogonski motori svemirskih brodova isključeni.

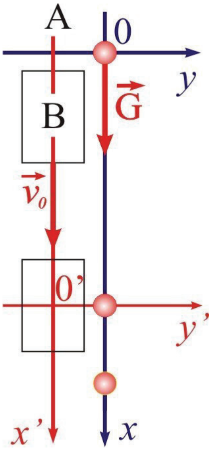
Odgovor:

a) U prvom i drugom brodu astronauti se nalaze u bestežinskom stanju.

b) Prvi brod predstavlja neinercijski referentni sustav jer se giba ubrzano u gravitacijskom polju, dok je drugi sustav inercijalan, jer nemamo prisustvo gravotacijskog polja, tj. gravitacijskih sila pa brod miruje ili se giba jednoliko pravocrtno.

6.3 Primjeri

Primjer 6.3.1 *Promatrač A ispusti kamen s vrha nebodera. Promatrač B se spušta dizalom s vrha nebodera brzinom v_0 u trenutku kada je kamen ispušten. Traže se položaj, brzina i ubrzanje kamena u odnosu prema promatraču B i to $t = 2\,\mathrm{s}$ nakon ispuštanja kamena ako se dizalo giba konstantnom brzinom $v_0 = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.*



Slika 6.4.

Rješenje:

Neka je promatrač A u sustavu X koji miruje, a promatrač B u sustavu X' (sustav koji je vezan za lift i giba se kostantnom brzinom prema dole). Ova dva sustava su povezana Galilejevim transformacijama ($t' = t$):

$$x'(t) = x(t) - v_0 t = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t$$

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{dx'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t) - v_0 t\right] \\ &= v(t) - v_0 = gt - v_0 \end{aligned}$$

$$a'(t) = \frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}(gt - v_0) = g = a$$

odakle su u drugoj sekundi položaj, brzina i ubrzanje u pokretnom sustavu S'

$$x'(t = 2\,\mathrm{s}) = 13.62\,\mathrm{m}$$

$$v'(t = 2\,\mathrm{s}) = 16.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a'(t = 2\,\mathrm{s}) = g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Primjer 6.3.2 *Na koloturu zanemarive mase obješena su dva tijela, $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$, povezana nerastegljivim čvrstim koncem zanemarive mase. Trenje između kolotura i konca, kao i sva ostala trenja zanemarite. Kolotur je pričvršćen na strop dizala koje se spušta ubrzanjem $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{g}}{4}$. Potrebno je:*

a) izračunati ubrzanje utega na koloturi,

b) odrediti ubrzanje tijela mase m_2 u sustavu kabine dizala, ako se naglo prereže konac na kojem je uteg visio,

c) vrijeme udarca utega m_2 o pod kabine, ako je u trenutku kada je konac prerezan uteg mirovao spram dizala na visini $h = 1\,\mathrm{m}$ od poda dizala.

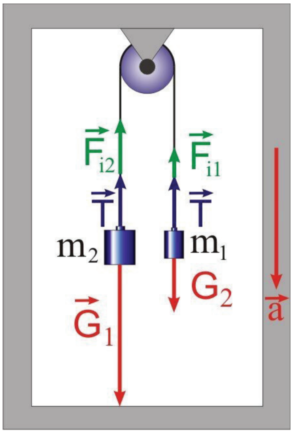
Rješenje:

a) Primjenimo li II. Newtonov zakon za dizalo koje se spušta, jednadžbe gibanja utega tada glase: za uteg mase m_1

$$\begin{aligned} m_1 a_k &= T - m_1 (g - a) \\ &= T - m_1 g + m_1 a \end{aligned}$$

a za uteg mase m_2

$$\begin{aligned} m_2 a_k &= m_2 (g - a) - T \\ &= m_2 g - m_2 a - T \end{aligned}$$



Slika 6.5.

gdje je a - ubrzanje dizala, a_k - ubrzanje sustava koloture, T - napetost niti koja djeluje suprotno od težine utega i ubrzanja dizala i jednaka je za oba tijela (zanemarili smo trenje u koloturi).

Odavde zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (g - a) \\ &= \frac{10\,\mathrm{kg} - 5\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}} \left(g - \frac{g}{4} \right) = \frac{g}{4} \end{aligned}$$

b) Naglim prerezivanjem konca uteg mase m_2 počinje padati ubrzanjem

$$a_2 = g - a = g - \frac{g}{4} = \frac{3g}{4}$$

c) Isti zakon slobodnog pada vrijedi i u dizalu, samo je sada ubrzanje a_2 umjesto g pa je vrijeme udara

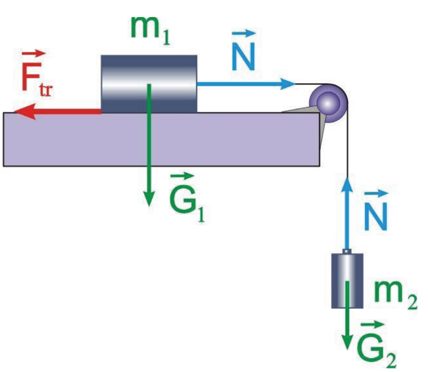
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} = \sqrt{\frac{2h}{\frac{3g}{4}}} = \sqrt{\frac{8h}{3g}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1\,\mathrm{m}}{3 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.52\,\mathrm{s}$$

Primjer 6.3.3 *Na horizontalnom stolu nalazi se tijelo mase* $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ *i pomoću niti koja je prebačena preko kolotura privezano je za drugo tijelo mase* $m_2 = 500\,\mathrm{g}$ *koje slobodno visi. Izračunajte kolika je:*

a) sila napetosti niti ako trenje zanemarimo,

b) sila napetosti niti ako tijelima zamjenimo mjesta, a trenje zanemarujemo,

c) sila napetosti niti kao pod a) i b) ako uzmemo trenje između tijela i stola u obzir, uz koeficijent trenja tijela i stola $\mu = 0.7$.



Slika 6.6.

Rješenje:

a) Sustav tijela se giba ubrzano, u označenom smjeru, ubrzanjem a. Tada se sili $G_2 = m_2 g$ suprotstavljaju inercijalne sile $m_1 a$ i $m_2 a$ pa je

$$m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

odakle dobivamo ubrzanje sustava

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

pa sila napetosti niti iznosi

$$\begin{aligned} N &= m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) = m_2 \left(g - \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 0.5\,\mathrm{kg}}{2\,\mathrm{kg} + 0.5\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3.924\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

b) U dobivenom izrazu za napetost niti $N = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ mase tijela simetrično mijenjaju mjesta pa zamjena tijela neće prouzročiti promjenu u napetosti niti, međutim ovo se neće odnositi i na ubrzanje sustava jer dobiveni izraz $a = \frac{m_2}{m_1+m_2} g$ nije simetričan na zamjenu masa.

c) Uzmemo li u obzir i trenje između tijela i stola, sustav bi dobio ubrzanje

$$\begin{aligned} m_2 g &= m_1 a_1 + \mu m_1 g + m_2 a_1 \\ a_1 &= \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

pa bi napetost niti iznosila

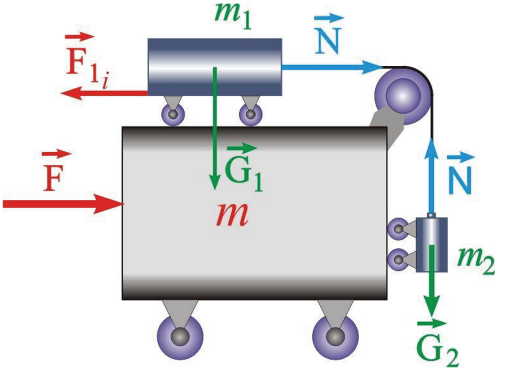
$$\begin{aligned} N' &= m_2 g - m_2 a_1 = m_2 (g - a_1) = m_2 \left(g - \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \right) \\ &= \frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1 + m_2} g = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 0.5\,\mathrm{kg} \cdot (1+0.7)}{2\,\mathrm{kg} + 0.5\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 6.6708\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

I u ovom slučaju (uz trenje) izraz za silu napetosti niti je simetričan s obzirom na zamjenu masa tijela m_1 i m_2 pa će napetost niti biti ista, no opet izraz za ubrzanje sustava neće biti simetričan na ovu zamjenu tijela.

Primjer 6.3.4 *Koliki je potrebni intezitet sile F koji konstantno djeluje u označenom pravcu (slika 6.7.) na kolica mase $m = 13\,\mathrm{kg}$ da bi tijela masa $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ bila u relativnom mirovanju u odnosu na kolica? Zanemarite sva trenja.*

Rješenje:

Na tijelo mase m_1 djelovati će inercijalna sila u smjeru napetosti niti, dok će inercijalna sila koja djeluje na tijelo mase m_2 samo povećavati reakciju podloga na kolicima.



Slika 6.7.

Iz jednadžbe ravnoteže sustava na kolicima dolazimo do potrebnog ubrzanje sustava

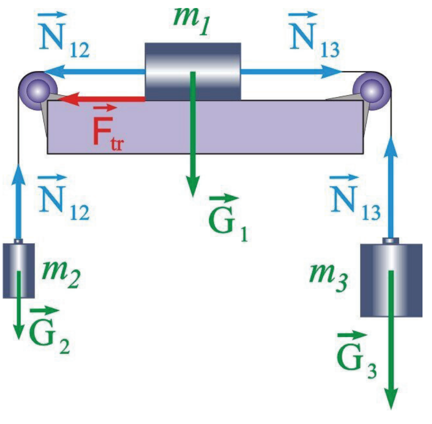
$$F_{1_i} = m_1 a_i = m_2 g \Longrightarrow a_i = \frac{m_1}{m_2} g$$

Kako sila F mora ubrzavati cijeli sustav tako da mu daje ubrzanje a potrebna sila iznosi

$$\begin{aligned} F &= (m + m_1 + m_2)\, a = \frac{m_1}{m_2}\,(m + m_1 + m_2)\, g \\ &= \frac{2\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{kg}} \cdot (13\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg} + 5\,\mathrm{kg})\, g = 8g = 8 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 78.\,48\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 6.3.5 *Odredite ubrzanje sustava masa* $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ *i* $m_3 = 20\,\mathrm{kg}$ *predstavljenog na slici 6.8., kao i vrijednost napetosti niti uz koeficijent trenja između tijela i horizontalne ravne podloge* $\mu = 0.25$. *Trenje u koloturama i otpor zraka zanemarite.*

Rješenje:



Slika 6.8.

Budući da je je $m_3 > m_2$, to jest $G_3 > G_2$ cijeli sustav će se gibati u naznačenom smjeru ubrzanjem a. Sili G_3 drže dinamičku ravnotežu inercijalne sile $m_1 a$ i $m_2 a$, težina G_2 tijela mase m_2 te sila trenja F_{tr} između tijela mase m_1 i horizontalne podloge.

Kako je

$$\begin{aligned} G_3 &= m_3 g \\ G_2 &= m_2 g \\ F_{tr} &= \mu m_1 g \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} \sum_i F_i &= m_3 g - m_1 a - m_2 a - m_3 a - m_2 g - F_{tr} \\ m_3 g &= m_1 a + m_2 a + m_3 a + m_2 g + \mu m_1 g \end{aligned}$$

pa je ubrznje sustava jednako

$$a = \frac{m_3 - \mu m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3} g = \frac{20\,\mathrm{kg} - 0.25 \cdot 10\,\mathrm{kg} - 5\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{kg} + 5\,\mathrm{kg} + 20\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3.\,5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sila napetosti niti N_{13} u proizvoljnoj točki između tijela masa m_1 i m_3 izračunava se tako što II. Newtonov zakon primjenimo samo na treće tijelo

$$N_{13} = m_3 g - m_3 a = m_3 (g - a) = 20\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 3.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 126.13\,\mathrm{N}$$

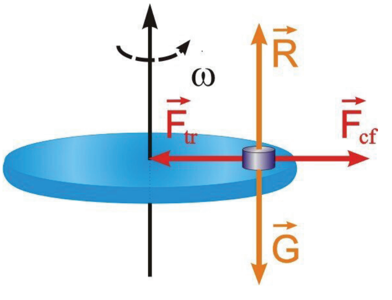
dok u proizvoljnoj točki između tijela m_1 i m_2 iznosi

$$N_{12} = m_2 g + m_2 a = m_2 (g + a) = 5\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 3.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 66.57\,\mathrm{N}$$

Primjer 6.3.6 *Disk se vrti frekvencijom $f = 30 \frac{okr}{\mathrm{min}}$ oko vlastite vertikalne osi. Sitno je tijelo položeno na plohu diska na udaljenosti $r = 20\,\mathrm{cm}$ od osi rotacije. Izračunajte najmanji faktor trenja potreban da sitno tijelo ne isklizne s diska?*

Rješenje:

Zbog vrtnje diska na sitno tijelo djeluje centrifugalna sila $\overrightarrow{F}_{cf}$ koja izaziva njegovo radijalno iskliznuće. Preko sile trenja kompenzira se ova sila, a najmanji koeficijent trenja potreban za to određuje se iz jednadžbe



Slika 6.9.

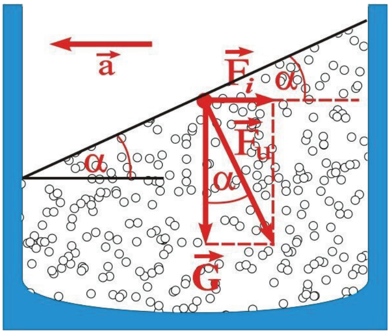
$$F_{cf} = F_{tr}$$

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= m (2\pi f)^2 r = \mu m g \\ \mu &= \frac{4\pi^2 f^2 r}{g} = 0.2 \end{aligned}$$

Primjer 6.3.7 *Približavajući se semaforu, automobil počinje kočiti i usporavati se deceleracijom $a = 2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Pretpostavivši posudu s vodom u sustavu automobila izračunajte kut pod kojim će se postaviti razina vode u odnosu prema horizontali?*

Rješenje:

Sustav automobila usporava pa mu je inercijalna sila suprotnog smjera od smjera usporenja (smjer ubrzanja prema natreg), dakle inercijalna sila je u smjeru gibanja automobila prema naprijed.



Slika 6.10.

Razina vode će se postaviti u takav položaj da je ravnina površine vode okomita na ukupnu silu koja djeluje na nju, odnosno na zbroj gravitacijske i inercijske sile, odakle slijedi

$$\overrightarrow{F}_u = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F}_i$$

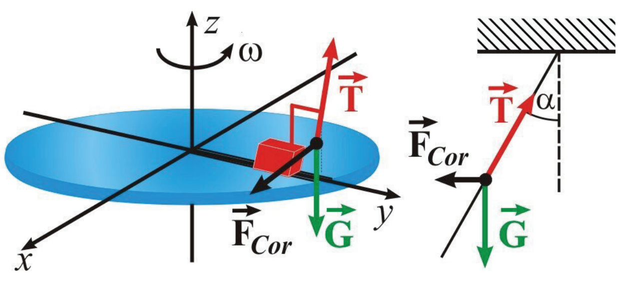
odnosno po komponentama

$$\begin{aligned} F_u \sin\alpha - ma &= 0 \\ F_u \cos\alpha - mg &= 0 \end{aligned}$$

gdje je α kut razine vode prema horizontali (slika 6.10.), a sila F sila okomita na stacionarnu postavljenu razinu vode. Iz ovih jednadžbi se dobiva

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{a}{g} = \frac{2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.2 \\ \alpha &= \arctan 0.2 = 0.2\,\mathrm{rad} = 11.\,52^\circ \end{aligned}$$

Primjer 6.3.8 *Na horizontalnoj ploči koja rotira konstantnom kutnom brzinom $\omega = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ radijalno su postavljene tračnice po kojima se gibaju kolica konstantnom brzinom $v = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliki kut zatvara matematičko njihalo s vertikalom, ako je ono obješeno na kolica?*



Slika 6.11.

Rješenje:

Na kuglicu matematičkog njihala djeluju Coriollisova sila, težina i napetost niti. Kako je

$$\overrightarrow{F}_{Cor} = 2m\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\omega}$$

imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{Cor} &= 2m \cdot v\overrightarrow{j} \times \omega\overrightarrow{k} \\ &= (2mv\omega)\overrightarrow{i}\end{aligned}$$

Da bi matematičko njihalo bilo ravnoteži, ove tri sile moraju sačinjavati zatvoreni poligon sila, odakle vrijedi

$$\begin{aligned}F_{Cor} - T\sin\alpha &= 0 \\ T\cos\alpha - G &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2mv\omega &= T\sin\alpha \\ mg &= T\cos\alpha\end{aligned}$$

odakle eliminiranjem nepoznate napetosti niti dobivamo

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{2v\omega}{g} \\ \alpha &= \arctan\frac{2v\omega}{g} = \arctan\frac{2\cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.378\,1 = 78.959^\circ\end{aligned}$$

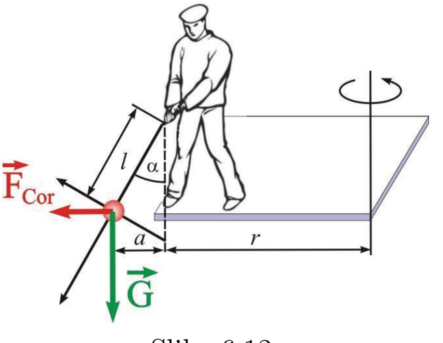
Primjer 6.3.9 *Čovjek stoji na rubu rotirajuće platforme i točno iznad ruba drži matematičko njihalo mase $m = 100\,\mathrm{g}$ i duljine $l = 80\,\mathrm{cm}$. Koliki je polumjer platforme ako se pri rotaciji nit otkloni za $\alpha = 30^\circ$, a pritom kinetička energija njihala iznosi $E_k = 5\,\mathrm{J}$?*

Rješenje:
Budući da je kinetička energija

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

brzina njihala iznosi

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



Slika 6.12.

Iz slike 6.12. se vidi da je $\sin\alpha = \frac{a}{l}$. Centrifugalna sila iznosi $F_{cf} = \frac{mv^2}{r+a}$. Ukupna tangencijalna komponenta sile na njihalo mora biti jednaka nuli što daje

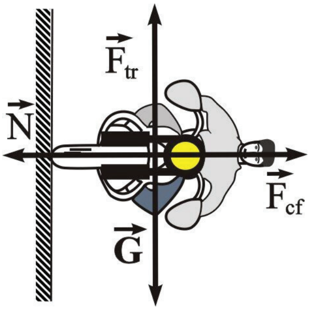
$$F_{cf} = mg\cdot\tan\alpha = \frac{mv^2}{r+a}$$

$$r = \frac{v^2}{g}\cot\alpha - a = \frac{2E_k}{mg}\cot\alpha - l\sin\alpha = 17.26 \text{ m}$$

Primjer 6.3.10 *Staza za motociklističke akrobacije prozvana "zidom smrti"*
napravljena je u obliku vertikalnog cilindra polumjera r i izrađena je od materijala koji omogućava relativno veliki koeficijent trenja. Ako je koeficijent trenja $\mu = 0.92$, a polumjer zida $r = 15\,\text{m}$, izračunajte:

a) kojom se najmanjom brzinom motociklist može voziti po vertikalnom zidu da ne kliže prema dolje?
b) motociklist i cilindar čine rotacijski referentni sustav koji se vrti kutnom brzinom ω oko svoje vertikalne osi. Koliko iznosi najmanja frekvencija vrtnje sustava koja omogućava gibanje motociklista bez klizanja prema dolje?

Rješenje:



Slika 6.13.

a) Prilikom vožnje po zakrivljenoj podlozi motociklist pritišće podlogu silom čija se reakcija manifestira kao centripetalna sila pridodana motociklistu. Klizanje niz vetrikalni cilindar neće biti moguće sve dok je sila trenja veća ili jednaka težini motociklista.

Dakle, razmatrane sile u vertikalnom smjeru daju

$$F_{tr} + mg = 0$$

Reakciju podloge dobivamo iz

$$N - F_{cf} = 0 \Longrightarrow N = F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$$

pa je sila trenja jednaka

$$F_{tr} = \mu N = \mu\frac{mv^2}{r}$$

Iz uvjeta zadatka vrijedi

$$\begin{aligned} F_{tr} &\geq mg \\ \mu\frac{mv^2}{r} &\geq mg \Longrightarrow v \geq \sqrt{\frac{gr}{\mu}} = \sqrt{\frac{9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 15\,\text{m}}{0.92}} = 12.65\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

b) U rotacijskom sustavu na motociklistu će djelovati sljedeće sile: težina, inercijalna cetrifugalna sila, sila trenja i reakcija podloge. Centrifugalna sila će biti poništena reakcijom podloge pa vrijedi

$$\begin{aligned} F_{cf} - N &= 0 \Longrightarrow N = F_{cf} = m\omega^2 r \\ F_{tr} &= \mu N = \mu m \omega^2 r \end{aligned}$$

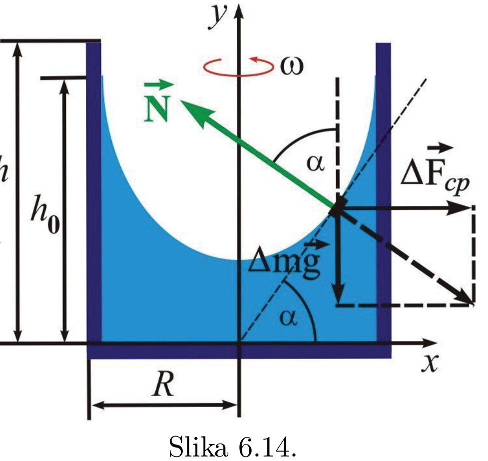
koristeći potrebni uvjet da motociklist ne isklizne $F_{tr} \geq mg$ dobivamo minimalnu frekvenciju potrebnu da motociklist ne klizi niz vetrikalni zid

$$\begin{aligned} \mu m \omega^2 r &\geq mg \Longrightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \sqrt{\frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0.92 \cdot 15\,\mathrm{m}}} = 0.84313\,\mathrm{s}^{-1} \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu r}} = 0.13419\,\mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Primjer 6.3.11 *Posuda u obliku cilindra polumjera r i visine h u kojoj je tekućina do visine h_0 rotira konstantnom kutnom frekvencijom ω oko vertikalne osi simetrije. Zbog vrtnje površina tekućine u posudi mijenja svoj oblik. Odredite matematički oblik površine tekućine u rotirajućem sustavu. Za koju će se frekvenciju razina tekućine podići uz stijenku posude upravo do njezine visine h, ako je $h = 12\,\mathrm{cm}$, $h_0 = 7\,\mathrm{cm}$ i $r = 2.5\,\mathrm{cm}$?*

Rješenje:

Postavljajući referentni sustav za tekućinu u posudi na svaki djelić tekućine Δm djeluju tri sile, grafički prikazane na slici 6.14. i to: gravitacijska sila, inercijalna centrifugalna sila i reakcija tekućine. Gravitacijska sila $\overrightarrow{G}$ i inercijalna centrifugalna sila $\overrightarrow{F}_{cf}$ uravnotežuju se reakcijom tekućine $\overrightarrow{N}$. Kut α između reakcije tekućine $\overrightarrow{N}$ i osi y jednak je kutu između



Slika 6.14.

tangente na površinu tekćine
u razmatranoj točki i osi x. Zbog toga je definiran omjer sila preko

$$\tan\alpha = \frac{\Delta F_{cf}}{\Delta mg} = \frac{\Delta m\omega^2 x}{\Delta mg} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Zbog definicije $y' = \tan\alpha$ u postavljenom referentnom sustavu vrijedi

$$dy = \tan\alpha \; dx = \frac{\omega^2 x}{g} dx$$

pa se do oblika tekućine dolazi integriranjem izraza

$$\begin{aligned} y &= y(x) = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2}{g} \int x dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_0 \\ y - y_0 &= \frac{\omega^2}{2g} x^2 \end{aligned}$$

gdje je integracijska konstanta y_0 jednaka minimalnoj visini tekućine nakon uspostavljanja stacionarnog oblika tekućine (parabola).

Volumen tekućine iznad minimuma iznosi

$$dV = 2\pi (y - y_0) x dx = 2\pi \left(\frac{\omega^2}{2g} x^2 \right) x dx = \frac{\pi\omega^2}{g} x^3 dx$$

pa integriranjem dolazimo do izraza

$$V = \int_0^r dV = \frac{\pi\omega^2}{g} \int_0^r x^3 dx = \frac{\pi\omega^2}{g} \frac{x^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi\omega^2 r^4}{4g}$$

Iz zakona očuvanja mase dobivamo uvjet

$$\begin{aligned} V_{poč} &= V_{kon} \\ r^2\pi \cdot h_0 &= r^2\pi \cdot y_0 + V = r^2\pi \cdot y_0 + \frac{\pi\omega^2 r^4}{4g} \\ y_0 &= h_0 - \frac{\omega^2 r^2}{4g} \end{aligned}$$

i prema uvjetu zadatka

$$y(r) = h = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + y_0$$

dobivamo

$$\begin{aligned} h &= \frac{\omega^2}{2g}r^2 + y_0 = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_0 - \frac{\omega^2 r^2}{4g} = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{4g} \\ \omega^2 &= \frac{4g\,(h-h_0)}{r^2} \Longrightarrow \omega\,(h) = \sqrt{\frac{4g\,(h-h_0)}{r^2}} \end{aligned}$$

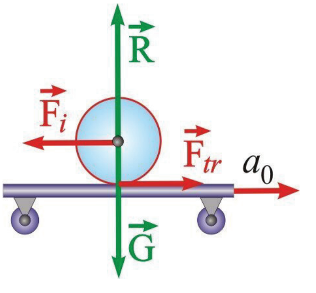
pa se uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobiva

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{g\,(h-h_0)} = \frac{2}{0.025\,\mathrm{m}}\sqrt{4\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(0.12\,\mathrm{m}-0.07\,\mathrm{m})} = 56.03\,\mathrm{s}^{-1}$$

Primjer 6.3.12 *Na kolicima koja se mogu ubrzavati položen je valjak polumjera r i mase m. Ako se kolica ubrzavaju stalnom akceleracijom a_0, kolikom se akceleracijom giba centar mase valjka u odnosu na ubrzani sustav kolica? Riješite zadatak za puni i šuplji valjak jednake mase.*

Rješenje:

Na valjak djeluju slijedeće sile: sila teže $\vec{G}$, sila reakcije podloge $\vec{R}$, sila trenja $\vec{F}_{tr}$ i inercijalna sila $\vec{F}_i = -m\vec{a}_i$. Primjenom II. Newtonova zakona za translacijsko gibanje imamo



Slika 6.15.

$$\sum_k \vec{F}_k = \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_i = m\vec{a}_{cm}$$

što rastavljeno na pojedine osi daje

$$\begin{aligned} \sum_k \vec{F}_{x_k} &= \vec{F}_i + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}_{cm} \\ \sum_k \vec{F}_{y_k} &= \vec{R} + \vec{G} = 0 \end{aligned}$$

ili pisano u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} F_i - F_{tr} &= m\cdot a_{cm} \\ R + G &= 0 \Longrightarrow R = G = mg \\ F_{tr} &= \mu F_N = \mu m g \end{aligned}$$

Ako nema trenja ($\mu = 0$), valjak će kliziti akceleracijom $-a_0$. Postoji li trenje, valjak će se kotrljati ako je a_0 manje od neke maksimalne vrijednosti koja ovisi o koeficijentu trenja, inače će za $a_0 > a_m$ kliziti. Ako se valjak kotrlja tada će prema II. Newtonovu zakonu za rotaciju biti

$$M = F_{tr} \cdot r = I \cdot \alpha \Longrightarrow F_{tr} = \frac{I \cdot \alpha}{r}$$

jer rotaciju valjka uzrokuje moment sile trenja. Za akceleraciju centra mase valjka se dobiva

$$\begin{aligned} m \cdot a_{cm} &= F_i - F_{tr} \\ m \cdot a_{cm} &= -ma_0 - \frac{I\alpha}{r} \end{aligned}$$

koristeći vezu između ubrzanja centra mase valjka i kutnog ubrzanja valjka $a_{cm} = \alpha \cdot r$ imamo

$$\begin{aligned} m \cdot a_{cm} &= -m \cdot a_0 - \frac{I \cdot \frac{a_{cm}}{r}}{r} = -ma_0 - \frac{I \cdot a_{cm}}{r^2} \\ m \cdot a_0 &= -m \cdot a_{cm} - \frac{I \cdot a_{cm}}{r^2} = -m \cdot a_{cm}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \end{aligned}$$

odnosno

$$a_{cm} = -\frac{a_0}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Za puni valjak je moment tromosti $I = \frac{1}{2}mr^2$ pa je

$$a_{cm} = -\frac{a_0}{1 + \frac{\frac{1}{2}mr^2}{mr^2}} = -\frac{a_0}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}a_0$$

dok je za šuplji valjak moment tromosti $I = mr^2$ pa je ubrzanje centra mase

$$a_{cm} = -\frac{a_0}{1 + \frac{mr^2}{mr^2}} = -\frac{1}{2}a_0$$

Primjer 6.3.13 *Izračunajte Coriolisovu akceleraciju zrakoplova koji leti brzinom $v = 300\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ uzduž ekvatora u smjeru istoka.*

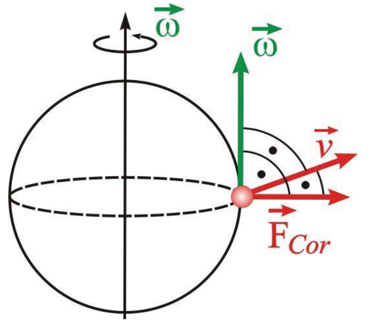
Rješenje:

Coriolisova sila je zadana izrazom

$$\vec{F}_{Cor} = 2m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$$

gdje je $\omega = \frac{2\pi}{T_Z} = 7.27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ kutna brzina Zemlje.

Kako je smjer brzine prema istoku, a smjer kutne brzine Zemlje prema sjeveru, smjer Coriolisove sile je radijalno usmjeren od središta Zemlje prema gore. Njen intezitet jednak je



Slika 6.16.

$$\begin{aligned} F_{Cor} &= 2m \cdot v\omega \sin\alpha \\ &= 2m \cdot v\omega \sin\frac{\pi}{2} = 2mv\omega \end{aligned}$$

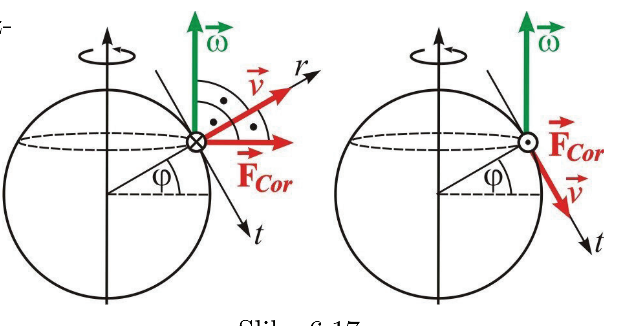
pa je Coriolisovo ubrzanje jednako

$$\begin{aligned} a_{Cor} &= 2v\omega = 2 \cdot 300\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 7.27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \\ &= 4.36 \cdot 10^{-2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4.36\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Primjer 6.3.14 *Projektil mase* $m = 500\,\mathrm{kg}$ *giba se brzinom* $v = 2700\frac{\mathrm{km}}{h}$.
Odredite smjer i intezitet Coriolisove sile ako projektil leti na $\varphi = 30°$ *sjeverne geografske širine i to: paralelom od zapada prema istoku, odnosno meridijanom od sjevera prema jugu?*

Rješenje:

Postavimo li kartezijev koordinatni sustav tako da je os z u smjeru kutne brzine gibanja Zemlje (od juga prema sjeveru), a os y tako da se projektil nalazi u $y, z-$ravnini.



Slika 6.17.

Razmotrimo gibanje od zapada prema istoku. Prema slici 6.17. smjer brzine projektila je suprotan smjeru osi x. Iz izraza za Coriolisovu silu imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_C &= 2m\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\omega} = 2m\cdot\left(-v\,\overrightarrow{i}\right)\times\left(\omega\,\overrightarrow{k}\right)\\
&= \left[2mv\omega\sin\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}\right)\right]\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_C &= (2mv\omega\sin 90)\,\overrightarrow{j} = (2mv\omega)\,\overrightarrow{j}\\
&= \left(2\cdot 500\,\mathrm{kg}\cdot 750\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 7.27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\right)\overrightarrow{j} = \left(54.54\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Dakle smjer Coriolisove sile je u smjeru osi y koji možemo rastaviti na dvije karakteristične komponente i to: F_r- radijalnu komponentu koja djeluje u smjeru polumjera Zemlje i smanjuje težinu projektila i na F_t- tangencijalnu komponentu koja djeluje bočno na projektil i skreće ga prema jugu. Te dvije sile iznose

$$\begin{aligned}
F_r &= F_C\cos\varphi = 54.54\,\mathrm{N}\cdot\cos 30 = 47.24\,\mathrm{N}\\
F_t &= F_C\sin\varphi = 27.27\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Za gibanje od sjevera prema jugu imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_C &= 2m\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\omega} = 2m\cdot v\left(-\cos\varphi\,\overrightarrow{k}+\sin\varphi\,\overrightarrow{j}\right)\times\left(\omega\,\overrightarrow{k}\right)\\
&= 2mv\omega\sin\varphi\,\overrightarrow{i}\\
&= \left(2\cdot 500\,\mathrm{kg}\cdot 750\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 7.27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\right)\sin 30\,\overrightarrow{i}\\
&= \left(29.88\,\overrightarrow{i}\right)\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Coriosilova sila djeluje bočno na projektil i skreće ga prema zapadu.

Primjer 6.3.15 *Odredite Coriolisovu silu koja djeluje na tijelo koje slobodno pada s visine h na zemljopisnoj širini φ. Koliki je otklon tijela i u kojem je smjeru? Posebno izračunajte otklon za podatke $h = 200\,\mathrm{m}$, $\varphi = 45°$.*

Rješenje:

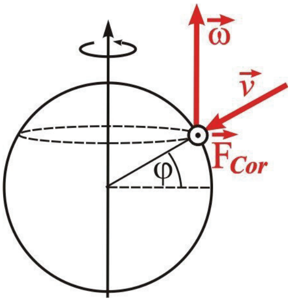
Postavimo li koordinatni sustav tako da os z ima smjer kutne brzine Zemlje (od južnog pola prema sjevernom), a brzina ima smjer prema središtu Zemlje i leži u $y,z-$ ravnini, tada Coriolisova sila

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_C &= 2m\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\omega}\\
&= 2m\cdot\left(-v\cos\varphi\,\overrightarrow{j}-v\sin\varphi\,\overrightarrow{k}\right)\times\left(\omega\,\overrightarrow{k}\right)\\
&= (-2mv\omega\cos\varphi)\,\overrightarrow{i}
\end{aligned}$$

ima smjer prema istoku. Ubrzanje tijela zbog Coriolisove sile ima intezitet

$$a_C = 2v\omega\cos\varphi$$

Tijelo slobodno pada, uz zanemarenje otpora zraka pa mu je brzina jednaka $v = gt$ pri čemu smo zanemarili utjecaj Coriolisove sile na brzinu padanja tijela pa brzinu v u izrazu za Coriolisovo ubrzanje možemo smatrati konstantnom. Označimo smjer gibanja tijela zbog Coriolisove sile sa x. Tada se integriranjem akceleracije dobiva



Slika 6.18.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= a = 2\omega v\cos\varphi = 2\omega gt\cos\varphi \Big/ \int_0^t dt \\
\frac{dx}{dt} &= 2\omega g\cos\varphi\int_0^t tdt = \omega gt^2\cos\varphi \Big/ \int_0^t dt \\
x &= \omega g\cos\varphi\int_0^t t^2dt = \frac{\omega gt^3\cos\varphi}{3}
\end{aligned}$$

Vrijeme potrebno da tijelo padne sa visine h iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

pa je otklon na istok jednak

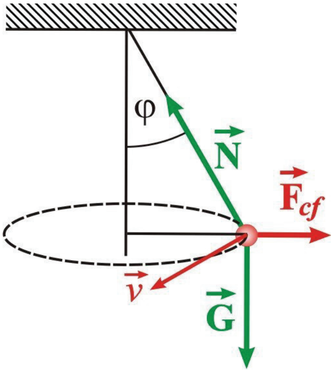
$$x = \frac{\omega g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3\cos\varphi}{3} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi$$

što uz uvjete zadatka daje

$$x = \frac{2}{3}\cdot 7.27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 200\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{2\cdot 200\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\cos\frac{\pi}{4} = 0.044\,\mathrm{m} \approx 4.4\,\mathrm{cm}$$

Primjer 6.3.16 *Stožasto se njihalo sastoji od kuglice mase* $m = 5\,\mathrm{g}$ *obješene na nit duljine* $l = 0.5\,\mathrm{m}$, *koja se giba jednoliko po kružnici polumjera* $r = 0.2\,\mathrm{m}$. *Primjenom D'Alambertova principa pronađite brzinu, period kruženja i napetost niti.*

Rješenje:



Slika 6.19

Prema D'Alambertovu principu kuglica je u dinamičkoj ravnoteži za koju vrijedi uvjet

$$\sum_k \overrightarrow{F}_k + \overrightarrow{F}_i = 0$$

Na kuglicu djeluju sljedeće sile: sila zemljine teže $\overrightarrow{G}$, napetost niti $\overrightarrow{N}$ i inercijska centrifugalna sila $\overrightarrow{F}_{cf} = \frac{mv^2}{r}\overrightarrow{r}_0$ pa jednadžba daje

$$\overrightarrow{G} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_{cf} = 0$$

Ove sile u poligonu sila moraju sačinjavati trokut pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} \\
v^2 &= \frac{r^2 g}{\sqrt{l^2 - r^2}} \\
v &= r\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} = 0.2\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sqrt{(0.5\,\mathrm{m})^2 - (0.2\,\mathrm{m})^2}}} = 0.93\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Napetost niti iznosi

$$N = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{mgl}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{0.005\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.5\,\mathrm{m}}{\sqrt{(0.5\,\mathrm{m})^2 - (0.2\,\mathrm{m})^2}} = 0.05\ \mathrm{N}$$

Period kruženja dobivamo preko brzine i iznosi

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{r\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2-r^2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{g}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{(0.5\,\mathrm{m})^2 - (0.2\,\mathrm{m})^2}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.36\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

6.4 Zadatci

Problem 6.4.1 *Kolikom silom čovjek mase* $m = 75\,\mathrm{kg}$ *djeluje na pod dizala kada se dizalo: a) podiže konstantnom brzinom, b) podiže konstantnom akceleracijom* $a = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *i c)spušta konstantnom akceleracijom* $a = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*?*

Rezultat: **a)** $F = 735.75\,\mathrm{N}$, b) $F = 773.25\,\mathrm{N}$, c) $F = 698.25\,\mathrm{N}$.

Problem 6.4.2 *Predmet se nalazi na kosini nagiba* $\alpha = 30°$*. Koeficijent trenja između predmeta i kosine iznosi* $\mu = 0.36$*. Kolikom se akceleracijom mora gibati kosina da bi predmet na njoj mirovao?*

Rezultat: $11.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \geq a_0 \geq 1.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 6.4.3 *Kolika centrifugalna sila djeluje na tijelo mase* $m = 50\,\mathrm{kg}$ *na zemljinoj površini: a) na ekvatoru, b) na* $45°$ *zemljine širine i c) na polu?*

Rezultat: a) $F_{cf} = 1.7\,\mathrm{N}$, b) $F_{cf} = 1.2\,\mathrm{N}$, c) $F_{cf} = 0\,\mathrm{N}$

Problem 6.4.4 *Preko kolotura Atwoodova padostroja prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi masa* $m_1 = 0.18\,\mathrm{kg}$ *i* $m_2 = 0.22\,\mathrm{kg}$*. Kolotur je u obliku diska mase* $m = 0.3\,\mathrm{kg}$ *i polumjera* $R = 0.1\,\mathrm{m}$*. Primjenom D'Alambertova principa izračunajte akceleraciju utega.*

Rezultat: $a = 0.71\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 6.4.5 *Sustav koji se sastoji od pomične i nepomične koloture i utega masa* $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ *i* $m_2 = 0.5\,\mathrm{kg}$ *prikazan je na slici (kul.str154). Primjenom D'Alambertova principa i principa virtualnog rada odredite akceleraciju utega. Zanemarite trenja i mase kolotura.*

Rezultat: $a_1 = 8.08\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_2 = 4.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 6.4.6 *Tijelo mase* $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ *nalazi se na ploči mase* $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ *koja miruje na podlozi. Statički i dinamički koeficijent trenja iznosi* $\mu = 0.1$*. Ako na ploču počne djelovati sila koja linearno raste s vremenom:* $F = 2t$*, u kojem trenutku počinje gornje tijelo kliziti po donjem? Zadatak riješite primjenom D'Alambertova principa.*

Rezultat: $t = 2.94\,\mathrm{s}$.