Poglavlje 4

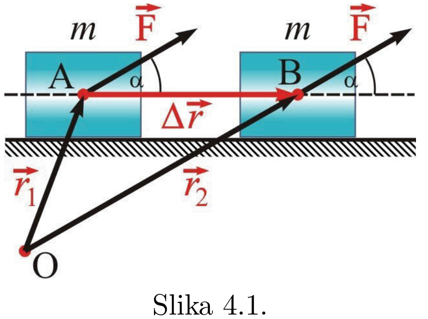
ENERGIJA I ZAKONI OČUVANJA

4.1 Osnovni pojmovi i definicije

Rad

Pojam rada ima široku primjenu u fizici i u ovom dijelu definiramo mehanički rad.

Definicija 4.1.1 *Skalarna fizikalna veličina koja opisuje djelovanje sile na nekom putu naziva se mehanički rad.*



Slika 4.1.

U analitičkom obliku rad predstavlja skalarni produkt sile $\left(\overrightarrow{F}\right)$ i prijeđenog puta $(\overrightarrow{s})$ odnosno vektora pomaka $(\Delta\overrightarrow{r})$.

$$W = A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r} \tag{4.1.1}$$

Napomena: Relacija (4.1.1) primjenjuje se u slučaju da je sila koja vrši rad nepromjenjiva na putu $\overrightarrow{F} = const.$

Na osnovu skalarnog produkta:

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} = F\ s\ \cos\alpha \tag{4.1.2}$$

imamo tri karakteristična slučaja:

1. za $\alpha = 0$ kada su sila i vektor pomaka kolinearni vektori, tj leže na pravcu gibanja imamo $W = Fs\cos 0 = Fs$

2. za $0 < \alpha < 90$. Opći slučaj kada sila zatvara bilo koji kut sa pravcem gibanja $W = Fs\cos\alpha$

3. $\alpha = 90$. Sila je okomita na pravac gibanja i u tom slučaju se ne vrši rad, $W = Fs\cos 90 = 0$

Ako je sila tijekom gibanja promjenjiva ($\overrightarrow{F} \neq const.$) uvodi se trenutni rad, odnosno jednadžba (4.1.1) se piše u diferencijalnom obliku:

$$dW = d\left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}\right) \tag{4.1.3}$$

$$W = \int dW = \int \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = \int F\cos\alpha\; ds \tag{4.1.4}$$

Jedinica za rad je džul $W\,[\mathrm{J}] = F\,[\mathrm{N}] \cdot s\,[\mathrm{m}]$.

Snaga

Definicija 4.1.2 *Snaga predstavlja brzinu vršenja nekog rada:*

$$P \to \frac{W}{t} \tag{4.1.5}$$

Izraz (4.1.5) dan je u kvalitativnom obliku. Analitički oblik će biti zadovoljen ako je rad tijekom vremena stalan:

$$P = \frac{W}{t} \tag{4.1.6}$$

U općenitom slučaju definiramo trenutnu snagu koja predstavlja prvi izvod rada po vremenu:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{4.1.7}$$

U slučaju da imamo stalnu silu na putu vršenja rada, jednadžbu (4.1.7) možemo pisati u slijedećem obliku:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}\right)}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} \tag{4.1.8}$$

$$P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = Fv\ \cos\alpha \tag{4.1.9}$$

Jedinica za snagu je vat $P\,[\mathrm{W}] = F\,[\mathrm{N}] \cdot v\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Energija

Uz rad je vezano iskustvo da se on može vršiti samo na račun zalihe nečega što je sposobno izvršiti rad. Fizikalna veličina koja opisuje tu sposobnost vršenja rada nazivamo energijom.

Definicija 4.1.3 *Energija je sposobnost vršenja rada.*

Napomena: Ovo je opća definicija energije. Tijelo može posjedovati neku sposobnost, ali ne može posjedovati rad, zato su to dvije kvalitativno različite fizikalne veličine, iako će imati istu mjernu jedinicu. Preko energije se daje i opća definicija rada: Rad je mjera promjene energije nekog sustava

$$W = dE \tag{4.1.10}$$

U mehanici razlikujemo dvije osnovne vrste energije: kinetička i potencijalna.

Definicija 4.1.4 *Sposobnost tijela da izvrši rad na osnovu svog gibanja naziva se kinetička energija.*

U analitičkom obliku ona glasi

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.1.11}$$

Iz navedene relacije vidimo da je kinetička energija skalarna veličina koja ovisi o masi tijela koje se giba i kvadrata brzine.

Jedinica za kinetičku energiju je džul, a dobiva se preko $E\,[\mathrm{J}] = m\,[\mathrm{kg}] \cdot \left\{v\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\right\}^2$

Definicija 4.1.5 *Sposobnost tijela da izvrši rad na osnovu svog položaja u polju sila naziva se potencijalna energija.*

Navedena definicija predstavlja opću definiciju potencijalne energije.

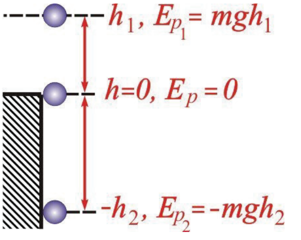
U mehanici razlikujemo dva karakteristična polja sila; gravitacijsko polje i polje elastičnih sila te zato razlikujemo dvije potencijalne energije: gravitacijsku i elastičnu potencijalnu energiju.

Definicija 4.1.6 *Sposobnost tijela da izvrši rad na osnovu položaja u gravitacijskom polju nazivamo gravitacijska potencijalna energija.*

Analitički oblik gravitacijske potencijalne energije tijela mase (m) na visini (h) iznad zemljine površine (h mnogo manje od R_Z).

$$E_P = mgh \tag{4.1.12}$$

Napomena: Za razliku od kinetičke energije koja uvijek mora biti pozitivna, potencijalna energija može biti i negativna u ovisnosti od izabrane razine (sliku 4.2.).



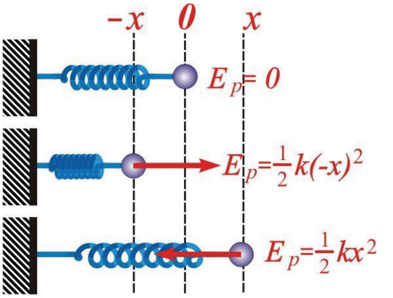
Slika 4.2.

Definicija 4.1.7 *Sposobnost tijela da izvrši rad na osnovu svog položaja u polju elastičnih sila zovemo elastičnom potencijalnom energijom.*

Porijeklo elastičnih sila leži u molekularnim silama mehaničkog sustava. One uvijek imaju smjer ka ravnotežnom položaju i poslije djelovanja vanjskih sila vraćaju tijelo u prvobitni (ravnotežni) položaj.

Tipični predstavnik takvog sustava je elastična opruga (pero). Analitički oblik elastične potencijalne energije je:

$$E_{ep} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.1.13}$$



Slika 4.3.

gdje je $k-$ konstanta opruge, a $x-$ pomak iz položaja ravnoteže (elongacija) (slika 4.3.).

Jedinica za elastičnu potencijalnu energiju je džul

$$E_{ep}\,[\mathrm{J}] = k\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \cdot \{x\,[\mathrm{m}]\}^2 \tag{4.1.14}$$

Napomena: Samo je elastična potencijalna energija apsolutna jer je određena unutarnjim stanjem sustava. Kinetička i potencijalna gravitacijska energija su relacijske veličine jer ne ovise samo od tijela koje ima tu sposobnost, nego i od referentnog sustava u odnosu na koji se iskazuje ta sposobnost.

Definicija 4.1.8 *U energetski izoliranim sustavima ukupna energija sustava uvijek ostaje stalna* $\sum_{i=1}^{n} E_i = const.$

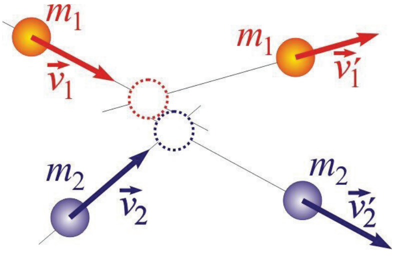
Ova definicija se zove zakon o održanju energije. Iz nje možemo definirati zakon o održanju mehaničke energije; ukupna kinetička i potencijalna energija ostaje uvijek stalna

$$E = E_k + E_p = const. \tag{4.1.15}$$

U nekom izoliranom sustavu energija se može pretvarati iz jednog oblika u drugi ali je ukupna energija uvijek jednaka. Ovaj zakon je jedan od najfundamentalnijih zakona u prirodi i može se proširiti na sve oblike energija i međudjelovanja. Također, energija se ne može ni stvoriti ni razoriti i rad se može vršiti samo na račun nekog oblika energije

Sudar (sraz)

Definicija 4.1.9 *Sudar nazivamo gibanje tijela nakon kratkog međudjelovanja bez utjecaja vanjskih sila.*



Slika 4.4.

Razlikujemo u principu dvije vrste sudara:

a) **Elastični sudar** - ukupna kinetička energija prije i poslije sudara ostaje nepromijenjena.

Iz zakona o očuvanju mehaničke energije i zakona očuvanja količine gibanja primijenjenih na savršeno elastični sudar tijela masa m_1 i m_2 te brzina $\overrightarrow{v}_1$ i $\overrightarrow{v}_2$ proizlazi da je brzina tijela nakon elastičnog sudara (slika 4.4.):

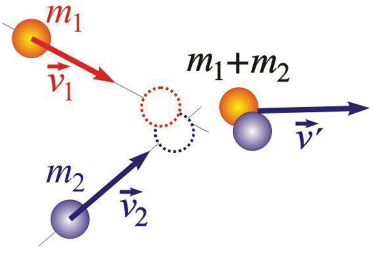
$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4.1.16}$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{4.1.17}$$

b) **Neelastični sudar** - ne važi zakon o održanju energije jer se dio kinetičke energije nakon sudara troši na deformaciju i zagrijavanje tijela.

Nakon savršenog neelastičnog sudara tijela se gibaju zajedno brzinom $\vec{v}'$ (slika 4.5.):

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4.1.18}$$



Slika 4.5.

Kinetička se energija pri tome smanjuje i troši na deformaciju i zagrijavanje. Razlika kinetičkih energija poslije i prije sudara (Q) je:

$$Q = E'_k - E_k = -\frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right)^2 \tag{4.1.19}$$

Ako zajednička normala na ravnini dodira tijela prolazi kroz njihov centar masa, sudar je centralan. Ako brzine leže na pravcu te zajedničke normale sudar je izravno centralan.

Faktor restitucije (k) pri izravnom centralnom sudaru dvaju tijela (npr. kugle) jednak je omjeru relativnih brzina poslije i prije sudara:

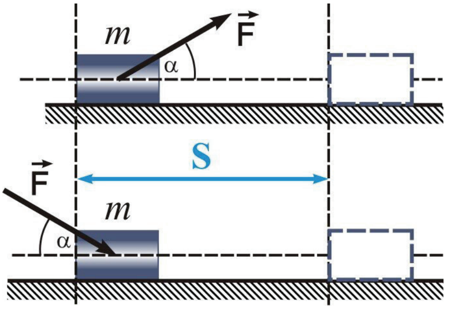
$$k = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 + v_2} \tag{4.1.20}$$

Za savršeno elastični sudar $k = 1$, za savršeno neelastični sudar $k = 0$, a za djelomično elastični sudar $0 < k < 1$.

4.2 Problemski zadaci

Problem 4.2.1 *Dva tijela istih masa gibaju se po horizontalnoj površini pri čemu su keoficijenti trenja tijela jednaki. Jedno tijelo se povlači silom* F_1*, a drugo se gura silom istog inteziteta. Kut koje zatvaraju sile s horizontalnom površinom su isti (slika 4.6.). Pretpostavimo da se tijela pod djelovanjem ovih sila gibaju pravolinijski, konstantnom brzinom te da prijeđu isti put. Kako se odnose izvršeni radovi:*

a) $W_1 < W_2$; b) $W_1 = W_2$; c) $W_1 > W_2$
Objasni odgovor!
Odgovor:



Slika 4.6.

c) $A_2 > A_1$, jer prilikom gibanja oba tijela sila F svladava silu trenja, ali u slučaju b) sila F ima dodatnu normalnu komponentu na površinu, što znači da povećava silu trenja i prilikom jednolikog gibanja tijela slijedi da je

$$F_1 = F_{tr_1}, \; F_2 = F_{tr_2}$$

pa je

$$F_{tr_2} > F_{tr_1} \Longrightarrow F_2 > F_1 \Longrightarrow W_2 > W_1$$

Problem 4.2.2 *Ako vozilo mase* $m = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ *. koje je u početnom trenutku u stanju mirovanja, nakon* $10\,\mathrm{s}$ *postigne brzinu od* $14.4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*, snaga motora vozila je:*

a) 0.4 kW b) 0.8 kW c) 1.6 kW d) 3.2 kW
Odgovor:
Pod c).

Problem 4.2.3 *U slijedećim iskazima prepoznajte oblike mehaničke energije i njihovu pretvorbu:*

a) jabuka slobodno pada s visine h,

b) strijelac napinje luk i odapinje strijelu,

c) gimnastičar pomoću odskočne daske izvodi salto,

d) lopta se odbija o zid.

Odgovor:

a) Gravitacijska potencijalna koja se pretvara u kinetičku energiju,

b) elastična potencijalna se pretvara u kinetičku energiju, a ona u gravitacijsku,

c) elastična potencijalna i kinetička energija u gravitacijsku potencijalnu, kinetičku translacije i rotacije, a zatim one u kinetičku energiju kojom gimnastičar pada na tlo,

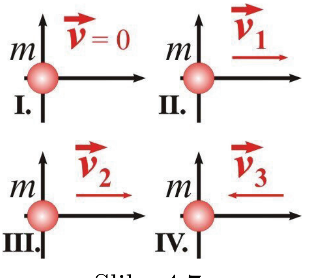
d) kinetička energija se pretvara u elastičnu potencijalnu, a zatim ona ponovno u kinetičku energiju gibanja lopte.

Problem 4.2.4 *Zadana su četiri koordinatna sustava u kojima se nalaze četiri kuglice istih masa. Neka su brzine sustava, odnosno brzine kuglica, kao na slici 4.7., pri čemu je* $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3$. *Pronađite kinetičku energiju kuglica u odnosu na sva četiri sustava.*

Odgovor:

- prvi koordinatni sustav

$$
\begin{aligned}
E_{k_1} &= 0,\ E_{k_2} = \frac{mv_1^2}{2}, \\
E_{k_3} &= \frac{mv_2^2}{2},\ E_{k_4} = \frac{mv_3^2}{2}
\end{aligned}
$$



Slika 4.7.

- drugi koordinatni sustav

$$
\begin{aligned}
E_{k_1} &= \frac{mv_1^2}{2},\ E_{k_2} = 0, \\
E_{k_3} &= 0,\ \text{jer je } \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0, \\
E_{k_4} &= \frac{4mv_3^2}{2},\ \text{jer je} \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = -2\vec{v}_3
\end{aligned}
$$

- treći koordinatni sustav

$$E_{k_1} = \frac{mv_2^2}{2},\ E_{k_2} = 0,\ \text{jer je } \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0,$$
$$E_{k_3} = 0,\ E_{k_4} = \frac{4mv_3^2}{2},\ \text{jer je } \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = -2\vec{v}_3$$

- četvrti koordinatni sustav

$$E_{k_1} = \frac{mv_3^2}{2},\ E_{k_2} = \frac{4mv_1^2}{2},$$
$$E_{k_3} = \frac{4mv_2^2}{2},\ E_{k_4} = 0,$$

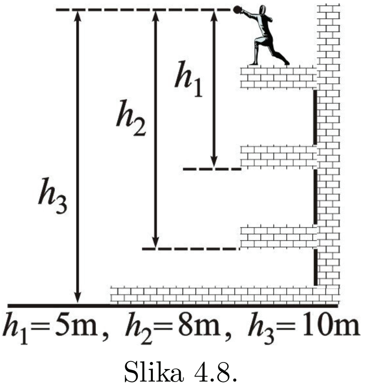
Problem 4.2.5 *Čovjek stoji na balkonu trećeg kata i drži u ruci tijelo mase* $m = 2\,\text{kg}$ *(slika 4.8.). Koliku potencijalnu energiju ima tijelo u odnosu na referentnu razinu:*

a) balkona drugog kata,

b) balkona prvog kata,

c) tla kuće.

Odgovor:



Slika 4.8.

U odnosu na balkon drugog kata potencijalna energija jednaka je umnošku ubrzanja sile zemljine teže, mase tijela i razlike visina (h_1), te iznosi

$$E_p = mgh_1 \simeq 98\,\text{J}$$

dok je u odnosu na prvi kat analogno

$$E_p = mgh_2 \simeq 157\,\text{J}$$

Najveću potencijalnu energiju tijelo ima u odnosu na tlo čiji iznos je jednak

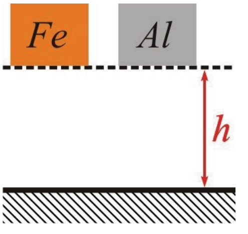
$$E_p = mgh_3 \simeq 196\,\text{J}$$

Problem 4.2.6 *Dva se tijela jednakih zapremina, jedno od zlata, a drugo od aluminija, nalaze na visini h. Koje tijelo posjeduje veću potencijalnu energiju, koliki je odnos njihovih potencijalnih energija i koje će tijelo udariti većom brzinom o tlo ako se pusti da slobodno pada (slika 4.9.).*

Odgovor:

Tijelo od željeza ima veću potencijalnu energiju jer ima veću masu (zbog $\rho_{Fe} > \rho_{Al}$), a tijela se nalaze na istoj visini. Odnos potencijalnih energija jednak je odnosu masa, odnosno odnosu gustoća:

$$\frac{E_{p_{Fe}}}{E_{p_{Al}}} = \frac{m_{Fe} \cdot g \cdot h}{m_{Al} \cdot g \cdot h} = \frac{m_{Fe}}{m_{Al}} = \frac{\rho_{Fe} \cdot V}{\rho_{Al} \cdot V} = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Al}}$$



Slika 4.9.

Brzina oba tijela pri padu na tlo bit će jednaka. Bez obzira na potencijalne energije, brzina pada tijela ovisi o visini s koje tijelo pada.

Problem 4.2.7 *Kada je manja gravitacijska potencijalna energija čovjeka: kada on stoji ili leži? Gdje je njegova potencijalna energija veća: na Mjesecu ili na Zemlji?*

Odgovor:

Potencijalna energija čovjeka je manja kada leži, jer je tada njegovo težište na manjoj visini. Potencijalna energija čovjeka je veća na Zemlji i to oko 6 puta, zbog jačeg gravitacijskog polja.

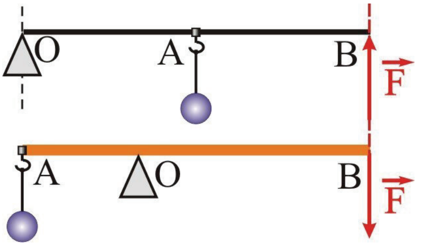
Problem 4.2.8 *Zbog čega se čovjek više zamara prilikom trčanja, nego li pri hodu?*

Odgovor:

Čovjek je cijelo vrijeme hoda oslonjen na tlo, makar jednom nogom. Međutim, pri trčanju postoje vremenski intervali (pri svakom koraku) kada se čovjek ne oslanja na tlo. Zbog toga on mora podizati svoje težište više pri trčanju nego pri hodu, odakle je i veći utrošak energije prilikom trčanja.

Problem 4.2.9 *Poluga se može na više načina koristiti za podizanje tereta (slika 4.10.). U kojem slučaju a) ili b) treba djelovati manjom silom da bi se podigao isti teret? Ukupne dužine poluga su jednake.*

Odgovor:



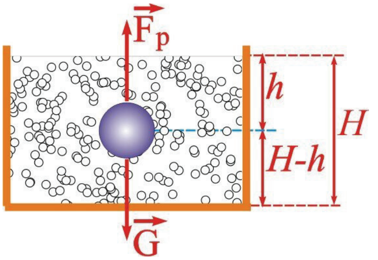
Slika 4.10.

U oba slučaja potrebno je djelovati jednakim silama. Udaljenosti točaka O, A i B su upravo takve da u oba slučaja treba djelovati silom inteziteta

$$F = \frac{1}{2}G$$

Za dodatno objašnjenje treba vidjeti slaganje paralelnih sila, razmotriti reakcije u osloncima i definiciju momenta sile.

Problem 4.2.10 *Tijelo gustoće manje od gustoće vode $\rho_t < \rho_{H_2O}$, potopljeno je u posudu do dubine h (slika 4.11.). Tijelo u tom položaju posjeduje potencijalnu energiju. O kakvoj potencijalnoj energiji je riječ? Pronađite izraz po kojemu možete izračunati tu potencijalnu energiju.*



Slika 4.11.

Odgovor:

Tijelo posjeduje potencijalnu energiju, ali ona je uzrokovana od sile pritiska fluida, a ima porijeklo u gravitacijskoj sili. Budući da je

$$\begin{aligned} E_p &= A \\ A &= F \cdot h \\ E_p &= (F_p - G) \cdot h \end{aligned}$$

gdje je $F = F_p - G$. Prema definiciji sile uzgona imamo

$$\begin{aligned} F_p &= \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_t} \cdot m_t \cdot g \\ E_p &= \left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_t} - 1 \right) \cdot mgh \end{aligned}$$

Problem 4.2.11 *Dva čovjeka se nalaze na litici visine H i podižu tijelo istih masa. Jedan povlači tijelo silom F_1 po strmoj ravni bez sile trenja, a drugi silom F_2 podiže teret.*

a) Kako se odnose sile kojima se tijela podižu?

b) Kako se odnose izvršeni radovi?

c) Ako se tijela podignu za isto vrijeme $t_1 = t_2$, kakav je odnos snaga?

Odgovor:

a) Sila $F_2 > F_1$.

b) U oba slučaja rad je jednak, jer je

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1 \cdot l = \frac{G \cdot h}{l} \cdot l = G \cdot h = mgh \\ W_2 &= G \cdot h = mgh \end{aligned}$$

c) Snaga je ista $P_1 = P_2$, jer je izvršen jednak rad za isto vrijeme.

Problem 4.2.12 *Kada se kugla mase m sudari centralno i elastično s drugom kuglom, koja je nepomična i iste mase kao prva kugla, onda poslije sudara:*

a) prva kugla se vraća putem kojim se gibala do trenutka sudara,

b) prva kugla se odbija pod određenim kutom u odnosu na smjer gibanja prije sudara,

c) prva kugla se zaustavlja na mjestu sudara, a druga se počinje gibati brzinom prve kugle,

d) svaka kugla se giba po određenoj trajektoriji.

Odgovor:
Točan odgovor je pod c).

Problem 4.2.13 *Tijelo, koje se giba po pravcu konstantnom brzinom, u jednom trenutku eksplodira i raspada se na veliki broj dijelova. Poslije ove eksplozije, nastavit će se gibati po istom pravcu i istom brzinom:*

a) najveći broj raspadnutih dijelova,

b) polovica raspadnutih dijelova,

c) svi raspadnuti dijelovi,

d) centar mase ovih dijelova.

Odgovor:
Točan odgovor je pod d).

Problem 4.2.14 *Pretpostavimo da se na mirnoj vodi nalazi splav koji se može gibati bez trenja. Neka se na jednom kraju splava nalazi čovjek i u jednom trenutku se počinje gibati ka drugom kraju. Pretpostavimo da splav, dužine l ima istu masu kao i čovjek.*

a) Kako će se odnositi brzine splava v_1 i čovjeka v_2 u odnosu na obalu i kolika je brzina čovjeka u odnosu na splav v_r?

b) Koliku je dužinu puta prešao čovjek u odnosu na obalu ako prijeđe rastojanje od početka do kraja splava?

c) Analiziraj slučajeve:

- kada bi masa splava bila mnogo veća od mase čovjeka ($m_1 \gg m_2$),
- masa čovjeka mnogo veća od mase splava ($m_1 \ll m_2$).

Odgovor:

a) Prema zakonu o očuvanju količine gibanja imamo:

$$\left.\begin{array}{c} m_1\overrightarrow{v}_1 - m_2\overrightarrow{v}_2 = 0 \\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \end{array}\right\} \Longrightarrow v_2 = v_1 \text{ jer je } m_1 = m_2$$

Brzina čovjeka u odnosu prema splavu je

$$\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{v}_2 - (-\overrightarrow{v}_1) = 2\overrightarrow{v}$$

b) Budući da je $v_r = \frac{l}{t}$, a $v = \frac{s}{t}$, to na osnovu a) imamo:

$$2v = \frac{l}{t} = 2\frac{s}{t} \Longrightarrow s = \frac{l}{2}$$

To znači da je čovjek prešao put u odnosu na obalu, koji odgovara polovici dužine splava.

c) Za slučaj $m_1 \gg m_2 \Longrightarrow v_r = v_2$ jer je $v_1 \simeq 0$, dok za slučaj $m_1 \ll m_2 \Longrightarrow v_r = v_1$, jer je $v_2 \simeq 0$.

Problem 4.2.15 *Brod plovi niz rijeku. Mijenja li to količinu vode koju rijeka donosi u more?*

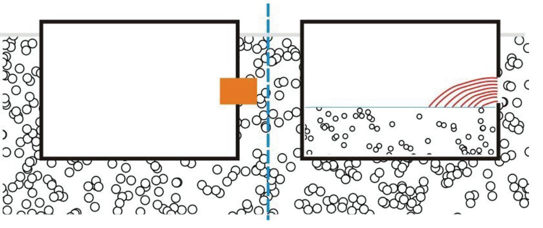
Odgovor:

Količina vode koju rijeka donosi u more se ne mijenja, jer količina vode koju brod gura ispred sebe odgovara količini vode koju elisa izbacuje iza sebe.

Problem 4.2.16 *U vodi pliva metalna posuda A, koja ima na jednoj svojoj bočnoj stijenci otvor, zatvoren čepom (slika 4.12.). Kako će se gibati posuda, ako čep izleti iz otvora, a posuda se počne puniti vodom?*

Odgovor:

Posuda će se u početku gibati desno zbog reakcije na mlaz vode (primjena zakona o očuvanju količine gibanja), da bi se nakon izvjesnog vremena posuda zaustavila zbog otpora vode.



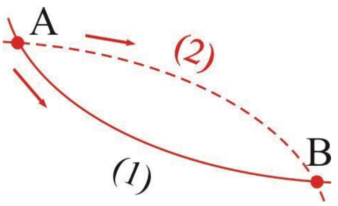
Slika 4.12.

U slučaju da nema otpora, gibanje bi trajalo sve dok bi trajalo utjecanje vode.

Problem 4.2.17 *Tijelo iz točke A može da stigne u točku B gibajući se po putanji (1) ili po putanji (2). Na osnovu zakona očuvanja energije odredite hoće li brzina u točki B biti jednaka u oba slučaja, tj. ovisi li brzina u točki B o obliku putanje. U oba slučaja smatrajte da je trenje između tijela i podloge zanemarivo. Izvedite isti zaključak za slučaj kada trenje nije zanemarljivo, ali je koeficijent trenja jednak na obje putanje.*

Odgovor:

a) Brzine su jednake ($v_1 = v_2$). Budući da je trenje zanemareno tijelo neće gubiti energiju tijekom gibanja, odnosno imati će istu kinetičku energiju u točki B bez obzira na putanju, a time i istu brzinu.



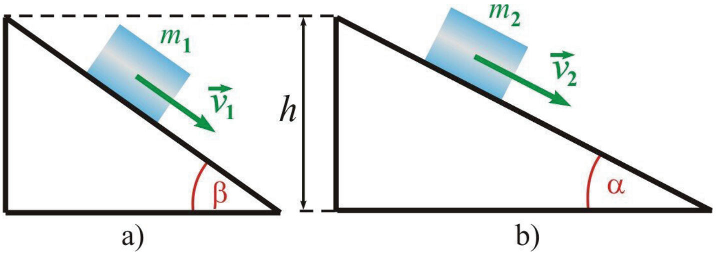
Slika 4.13.

b) Brzina u točki B je veća ako se tijelo giba po putanji (2), zbog toga što je normalna sila na putanju manja, a samim tim i sila trenja pa tijelo gubi manje energije.

Problem 4.2.18 *Niz dvije strmine istih visina, ali različith baza, klize dva tijela istih masa* ($m_1 = m_2$) *bez sile trenja (slika 4.14.). Ako su tijela pošla sa vrha strme ravni onda:*

- prvo tijelo ima veću brzinu u podnožju strme ravni u odnosu na drugo tijelo ($v_1 > v_2$),
- oba tijela će imati istu brzinu,
- drugo tijelo će imati veću brzinu ($v_1 < v_2$). Objasnite odgovor.

Odgovor:



Slika 4.14.

Oba tijela imaju istu konačnu brzinu, jer su oba imala istu potencijalnu energiju. Kako smo trenje zanemarili, to je ista potencijalna energija pretvorena u kinetičku energiju tijela na dnu kosine pa tijela imaju istu kinetičku energiju, odnosno istu konačnu brzinu. Kako tijela imaju istu masu, to moraju imati i istu brzinu pri dnu kosine.

Problem 4.2.19 *U nekom sustavu imamo kuglicu mase m i pregradu idealne čvrstoće. Kuglica se giba prema pregradi nekom konstantnom brzinom v (slika 4.15.). Poslije elastičnog sudara o pregradu, kuglica nije promijenila intezitet brzine. Je li u tom procesu došlo do promjene kinetičke energije, odnosno količine gibanja? Objasnite odgovor.*

Odgovor:

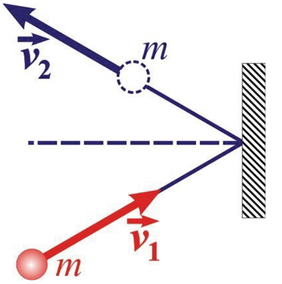
Nije došlo do promjene kinetičke energije jer je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

u funkciji „kvadrata" brzine, količina gibanja nije ostala ista, pri čemu je promijenjena za

$$\Delta \overrightarrow{p} = m \cdot (\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)$$

Razlog leži u tome što je količina gibanja vektorska fizikalna veličina.



Slika 4.15.

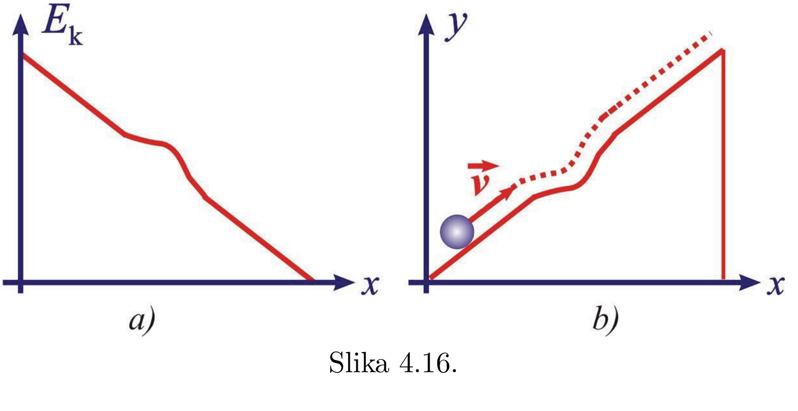
Problem 4.2.20 *Mora li u sustavu u kojem vrijedi zakon o očuvanju mehaničke energije vrijediti i zakon o očuvanju količine gibanja?*

Odgovor:

Ne, vidjeti prethodni zadatak.

Problem 4.2.21 *Tijelo se giba po padini i na grafikonu je prikazan raspored kinetičke energije tijela duž padine (tijelo se giba bez trenja). Ako pretpostavimo da je u početnom trenutku ukupna energija tijela* $E_u = E_{k_1}$, *onda možemo zaključiti da se tijelo giba niz - uz padinu (slika 4.16.). Objasnite odgovor i pokušajte skicirati padinu.*

Odgovor:



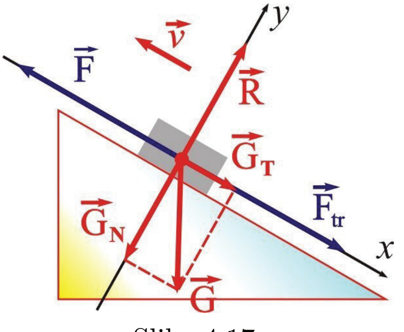
Slika 4.16.

Tijelo se giba uz padinu jer kinetička energija opada s vremenom, dakle tijelo se penje uz padinu.

4.3 Primjeri

Primjer 4.3.1 *Čovjek gura teret mase* $m = 35\,\mathrm{kg}$ *konstantnom brzinom uz kosinu nagiba* $\alpha = 30^\circ$ *i prijeđe* $l = 50\,\mathrm{m}$ *puta. Sila kojom djeluje čovjek na tijelo je paralelna uz kosinu. Koeficijent trenja tijela i kosine iznosi* $\mu_k = 0.3$*. Izračunajte rad svake pojedine sile i ukupni rad svih sila.*

Rješenje:



Slika 4.17.

Na teret djeluje sila teže $\overrightarrow{G} = mg$, čovjek paralelnom silom $\overrightarrow{F}$ uz kosinu, normalna reakcija podloge $\overrightarrow{R}$ i sila trenja $\overrightarrow{F}_{tr}$ paralelno niz kosinu. Postavimo koordinatni sustav tako da os x bude paralelno niz kosinu, a os y okomito na kosinu. Kako čovjek gura teret konstantnom brzinom $\overrightarrow{v} = const.$ to je ubrzanje tijela jednako nuli. Tada po II. Newtonovu zakonu vrijedi:

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0$$

odnosno po komponentama

$$\begin{aligned} \sum_i F_{x_i} &= -F + F_{tr} + G_T = 0 \\ \sum_i F_{y_i} &= R - G_N = 0 \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} R &= G_N = mg\cos\alpha = 297.35\,\mathrm{N} \\ G_T &= mg\sin\alpha = 171.68\,\mathrm{N} \\ F_{tr} &= \mu_k R = 0.3 \cdot 297.35\,\mathrm{N} = 89.2\,\mathrm{N} \\ F &= F_{tr} + G_T = 260.88\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

odnosno, rad pojedinih sila je za $s = l$

$$\begin{aligned} W_R &= W_{G_N} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{s} = R \cdot l \cos\frac{\pi}{2} = 0\,\mathrm{J} \\ W_{G_T} &= \overrightarrow{G}_T \cdot \overrightarrow{s} = G_T \cdot l \cos\pi = 171.68\,\mathrm{N} \cdot 50\,\mathrm{m} \cdot (-1) = -8584\,\mathrm{J} \\ W_{F_{tr}} &= \overrightarrow{F}_{tr} \cdot \overrightarrow{s} = F_{tr} \cdot l \cos\pi = 89.2\,\mathrm{N} \cdot 50\,\mathrm{m} \cdot (-1) = -4460\,\mathrm{J} \\ W_F &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} = F \cdot l \cos 0 = 260.88\,\mathrm{N} \cdot 50\,\mathrm{m} \cdot 1 = 13044\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

pa je ukupni rad jednak

$$\begin{aligned} W_{uk} &= W_R + W_{G_N} + W_{G_T} + W_{F_{tr}} + W_F \\ &= 0\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} - 8584\,\mathrm{J} - 4460\,\mathrm{J} + 13044\,\mathrm{J} = 0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Ovaj smo rezultat mogli i očekivati jer se tijelo giba konstantnom brzinom po pravcu pa je ukupna sila jednaka nuli, odnosno i ukupni rad je tada jednak nuli.

Primjer 4.3.2 *Dizalo mase* $m = 800\ \mathrm{kg}$ *ubrza se akceleracijom* $a = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *iz mirovanja do brzine* $v = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*, a zatim se nastavlja dizati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja* $F_{tr} = 2000\,\mathrm{N}$*. Kolika je:*

a) Prosječna snaga?

b) Maksimalna snaga potrebna motoru da ubrza dizalo iz mirovanja do $v = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

c) Koliku snagu razvija motor pri jednolikom dizanju?

d) Koliki je rad motora za vrijeme $t = 12\ \mathrm{s}$ od početka dizanja?

Rješenje:

a) Sila koju mora prizvesti motor dizala mora svladati silu teže, silu trenja i jednoliko ubrzavati dizalo

$$F_1 = mg + F_{tr} + ma = 10.65\ \mathrm{kN}$$

Pri tome motor obavlja rad

$$W_1 = F_1 \cdot s = F_1 \cdot \frac{v_0^2}{2a} = (mg + F_{tr} + ma) \cdot \frac{v_0^2}{2a} = 133.1\ \mathrm{kJ}$$

Budući da je taj rad obavljen u vremenu $t_1 = \frac{v_0}{a} = 5$ s, prosječna snaga je

$$\overline{P_1} = \frac{W_1}{t_1} = 26.62 \text{ kW}$$

b) Trenutna snaga $P = F \cdot v$ mijenja se za vrijeme jednolikog ubrzanja od nule do maksimalne vrijednosti P_m

$$P_m = F_1 \cdot v_0 = 53.24 \text{ kW}$$

Možemo uočiti da je srednja snaga jednaka polovini maksimalne snage.

c) Pri jednolikom dizanju sila motora dizala svladava silu teže i silu trenja

$$F_2 = mg + F_{tr} = 9.85 \text{ kN}$$

pa je snaga pri jednolikom dizanju

$$P_2 = F_2 \cdot v_0 = 49.24 \text{ kW}$$

d) Rad za vrijeme jednolikog ubrzavanja je W_1, dakle trebamo izračunati još rad pri jednolikom dizanju W_2.

$$W_2 = F_2 \cdot s = F_2 \cdot v_0 \cdot t_2 = P_2 \cdot t_2 = 344.68 \text{ kJ}$$

gdje je $t_2 = t - t_1 = 7\ s$ vrijeme jednolikog gibanja dizala. Ukupni rad jednak je zbroju pojedinih radova

$$W_{uk} = W_1 + W_2 = 133.1 \text{ kJ} + 344.68 \text{ kJ} = 477.78\,\text{kJ}$$

Primjer 4.3.3 *S vrha brežuljka, koji možemo aproksimirati kosinom, visine*
$h = 30\,\text{m}$ *i duljine* $l = 150\,\text{m}$*, klizi skijaš mase* $m = 75\,\text{kg}$*. Odredite kinetičku energiju i brzinu koju će postići pri dnu kosine ako je koeficijent trenja klizanja* $\mu_k = 0.06$*.*

Rješenje:

Po zakonu očuvanja energije, mora biti razlika ukupne konačne energije koju ima skijaš pri dnu brežuljka E_2 i na njegovu vrhu E_1 jednaka radu sile trenja.

$$E_2 - E_1 = E_{k_2} + E_{p_2} - (E_{k_1} + E_{p_1}) = W_{tr}$$

Kako je skijaš imao početnu brzinu $v_0 = 0$ to je $E_{k_1} = 0$, a ako za referentnu razinu potencijalne energije uzmemo dno brežuljka tada je $E_{p_2} = 0$. Odavde slijedi

$$E_{k_2} - E_{p_1} = W_{tr}$$

$$\begin{aligned} E_{k_2} &= E_{p_1} + W_{tr} = m \cdot g \cdot h + \overrightarrow{F}_{tr} \cdot \overrightarrow{l} \\ &= m \cdot g \cdot h + F_{tr} \cdot l \cdot \cos\pi = m \cdot g \cdot h - F_{tr} \cdot l \end{aligned}$$

Sila trenja jednaka je

$$F_{tr} = \mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha,$$

a prijeđeni put jednak je duljini kosine $s = l$. Potrebni kut dobivamo iz jednakosti

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}}$$

Sada je

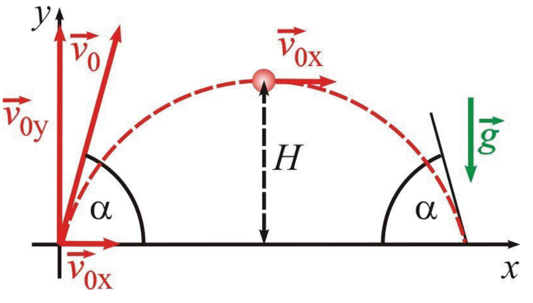
$$\begin{aligned} E_{k_2} &= m \cdot g \cdot h - \mu_k \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} \cdot l \\ &= m \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \mu_k \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}\right) \\ &= 75\,\mathrm{kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m} \left(1 - \sqrt{24}\right) = 15584\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k^{(2)}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15584\,\mathrm{J}}{75\,\mathrm{kg}}} = 20.38 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 73.39 \frac{\mathrm{km}}{h}$$

Primjer 4.3.4 *Tijelo je izbačeno početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontalnoj ravnini. Odredite maksimalnu visinu H koju će doseći tijelo, ako na njega djeluje samo konstantna sila teže. Zadatak riješite:*

a) primjenom Newtonovih zakona,

b) primjenom zakona o očuvanju mehaničke energije.



Slika 4.18.

Rješenje:

Postavimo koordinatni sustav tako da u početnom trenutku tijelo bude u ishodištu, koordinatna os x u horizontalnom smjeru, a os y usmjerimo vertikalno naviše. Tada je sila zemljine teže (pa i ubrzanje) usmjerena u negativnom smjeru osi y pa nema ubrzanja u x smjeru.

a) Primjenom II. Newtonova zakona imamo

$$
\begin{aligned}
F_x &= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot a_x = 0 \\
F_y &= m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = m \cdot a_y = -m \cdot g \Longrightarrow a_y = -g
\end{aligned}
$$

Uz početne rubne uvjete $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ i $\vec{r} = 0$ dobivamo nakon integriranja

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= v_x(t) = \int a_x \cdot dt = \int 0 \cdot dt = c_{1x} \\
\frac{dx(0)}{dt} &= c_{1x} = v_{0x} \Longrightarrow c_{1x} = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\
\frac{dy(t)}{dt} &= v_y(t) = \int a_y \cdot dt = \int -gdt = -gt + c_{1y} \\
\frac{dy(0)}{dt} &= -g \cdot 0 + c_{1y} = v_0 \sin\alpha \Longrightarrow c_{1y} = v_0 \sin\alpha \\
\frac{dy(t)}{dt} &= -g \cdot t + v_0 \sin\alpha
\end{aligned}
$$

Tijelo će doseći najvišu točku u trenutku t_H kada y-komponenta brzine bude jednaka nuli.

$$v_y(t_H) = -gt_H + v_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Maksimalna visina H jednaka je $y = y(t_H)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int v_y(t)\,dt = \int (-gt + v_0 \sin\alpha)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + c_2^y \\ y(0) &= -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 \sin\alpha + c_2^y = 0 \Longrightarrow c_2^y = 0 \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}$$

što u trenutku t_H daje

$$\begin{aligned} H &= y(t_H) = -\frac{1}{2}gt_H^2 + v_0 t_H \sin\alpha \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)\sin\alpha \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \end{aligned}$$

b) Neka nam je $y = 0$ referentna razina potencijalne energije $E_p(0) = 0$. Tada je o početnom trenutku energija

$$E(0) = E_p(0) + E_k(0) = E_k(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

U trenutku kada je tijelo na maksimalnoj visini $y = H$, y - komponenta brzine jednaka je nuli, a x komponenta brzine je konstantna i iznosi $v_x = v_{0x}$, slijedi

$$E(H) = E_p(H) + E_k(H) = mgH + \frac{1}{2}mv_x^2 = mgH + \frac{1}{2}mv_{0x}^2$$

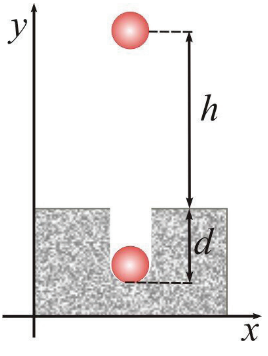
Po zakonu očuvanja energije vrijedi

$$\begin{aligned} E(0) &= E(H) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgH + \frac{1}{2}mv_{0x}^2 \\ H &= \frac{v_0^2 - v_{0x}^2}{2g} = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - v_{0x}^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \end{aligned}$$

Kao što vidimo možemo problem rješavati samo zakonom o očuvanju energije. Ako nam u primjeru nije potrebno poznavati putanju tijela, što se dobije primjenom Newtonovih zakona, problem rješavamo zakonima očuvanja što je u principu lakše.

Primjer 4.3.5 *Tijelo pada sa visine $h = 24\,\mathrm{m}$ i zabije se u pijesak do dubine $d = 0.5\,\mathrm{m}$. Odredite srednju silu otpora pijeska ako tijelo ima masu $m = 1\,\mathrm{kg}$ i početnu brzinu $v_0 = 14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vertikalno naniže. Zadatak riješite pomoću Newtonovih zakona te pomoću zakona očuvanja mehaničke energije. Otpor zraka zanemarite.*

Rješenje:



Slika 4.19.

Srednja sila otpora pijeska jednaka je

$$F_{ot} = ma$$

Deceleraciju se može pronaći iz konačne brzine tijela pri udaru u pijesak i dubine prodiranja u pijesak. Za ravnomjerno usporeno gibanje vrijedi

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{v^2}{2d}$$

dok je konačna brzina pri udaru u pijesak

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

pa je

$$\begin{aligned} F_{ot} &= m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{2d} = m \cdot \frac{v_0^2 + 2gh}{2d} \\ &= 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\left(14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 24\,\mathrm{m}}{2 \cdot 0.5\,\mathrm{m}} = 666.88\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Zakon očuvanja mehaničke energije daje vrijednost ukupne energije tijela pri udaru u pijesak koja mora biti jednaka radu otpora sredstva, prema tome

$$W_{ot} = F_{ot} \cdot d = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = E_{uk}$$

Odavde je sila otpora sredstva

$$F_{ot} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh}{d} = m \cdot \frac{v_0^2 + 2gh}{2d} = 666.88\,\mathrm{N}$$

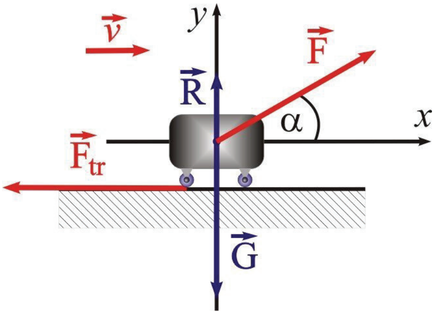
Vidimo da se dobivaju identični rezultati.

Primjer 4.3.6 *Čovjek vuče kolica mase $m = 25\,\mathrm{kg}$ po horizontalnom putu duljine $s = 50\,\mathrm{m}$ užetom koje zatvara kut od $\alpha = 30°$ s horizontalom. Koeficijent trenja kolica i podloge je $\mu = 0.3$. Koliki rad izvrši čovjek ako se kolica gibaju konstantnom brzinom?*

Rješenje:

Urađeni rad, s obzirom da je kut sile i podloge konstantan, jednak je

$$W = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^s F\cos\alpha \cdot ds$$



Slika 4.20.

Ukupna sila kojom djelujemo na tijelo jednaka je nuli (gibanje konstantnom brzinom)

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{F}_i &= \vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_{tr} + \vec{R} = 0 \\
\sum_i F_{x_i} &= F\cos\alpha - F_{tr} = 0 \\
\sum_i F_{y_i} &= F\sin\alpha + R - G = 0
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
F_{tr} &= \mu\,(G - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \\
F &= \frac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}
\end{aligned}$$

pa je rad jednak

$$\begin{aligned} W &= \int_0^s F\cos\alpha \cdot ds = F\cos\alpha \int_0^s ds = (F\cos\alpha)\cdot s \\ &= \frac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\cdot s\cos\alpha \\ &= \frac{0.3\cdot 25\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos\frac{\pi}{6} + 0.3\sin\frac{\pi}{6}}\cdot 50\,\mathrm{m}\cos\frac{\pi}{6} = 3135.6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.7 *Silom od* $240\,\mathrm{N}$ *čovjek vuče hladnjak mase* $85\,\mathrm{kg}$ *po horizontalnom putu. Sila djeluje pod kutom od* 20° *u odnosu nahorizontalu. Koeficijent dinamičkog trenja iznsi* 0.2*. Hladnjak se pomjeri za* $8\,\mathrm{m}$*. Koliki je rad obavila vučna sila, a koliki sila trenja?*

Rješenje:
Koristeći definiciju rada

$$W = \int \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int \left|\overrightarrow{F}\right|\cdot\left|d\overrightarrow{r}\right|\cdot\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{F},\overrightarrow{r}\right)$$

na uvjete iz zadatka: vučna sila je konstantna i zatvara konstantni kut α u odnosu na putanju, slijedi da je obavljeni rad vučne sile jednak

$$\begin{aligned} W &= \int_0^s F\cdot ds\cdot\cos\alpha = F\cos\alpha\int_0^s ds = (F\cos\alpha)\cdot s \\ &= 240\,\mathrm{N}\cdot 8\,\mathrm{m}\cdot\cos 20^\circ = 1804.2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Sila trenja jednaka je

$$\begin{aligned} F_N + F\sin\alpha &= mg \\ F_N &= mg - F\sin\alpha \\ F_{tr} &= \mu F_N = \mu\,(mg - F\sin\alpha) \end{aligned}$$

a rad sile trenja je

$$\begin{aligned} W_{tr} &= \int_0^s F_{tr}\cos\pi\cdot ds = -F_{tr}\int_0^s ds \\ &= -F_{tr}\cdot s = -\mu\,(mg - F\sin\alpha)\cdot s \\ &= -0.2\left(85\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 240\,\mathrm{N}\cdot\sin 20^\circ\right)\cdot 8\,\mathrm{m} \\ &= -1.6\,\mathrm{m}\cdot 751.77\,\mathrm{N} = -1202.8\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.8 *Koliki je rad potreban obaviti da bi se kameni blok mase* $m = 20$ *t izvukao iz* $15\,\mathrm{m}$ *duboke jame po kosini koja sa horizontalnom ravninom zatvara kut od* $30\,^\circ$*. Koeficijent trenja između bloka i kosine je* 0.25*?*

Rješenje:
Duljinu prijeđenog puta dobivamo iz odnosa nagiba i visine

$$s = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin 30\,^\circ} = 2d = 2 \cdot 15\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{m}$$

Pretpostavljajući da je gibanje jedoliko slijedi

$$\begin{aligned} F &= mg\sin\alpha + F_{tr} \\ F_{tr} &= \mu mg\cos\alpha \\ F &= mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, mg \end{aligned}$$

Izvršeni rad je

$$\begin{aligned} W &= \int_0^s F ds = F\int_0^s ds = F \cdot s \\ &= (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, mgs \\ &= (\sin 30\,^\circ + 0.25 \cdot \cos 30\,^\circ) \cdot 20\ 000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m} \\ &= 4.22 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 4.22\,\mathrm{MJ} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.9 *Na kutiju djeluje sila prema zakonu* $F(x) = A(D-x)^2$ *gdje je* x *udaljenost kutije od početnog položaja izražena u metrima, a konstante su:* $D = 5\,\mathrm{m}$ *i* $A = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$*. Koliki rad je obavljen na putu od ishodišta do* $x = 5\,\mathrm{m}$.

Rješenje:
Diferencijalna promjena vektora položaja jednaka je prmjeni koordinate dx, stoga je obavljeni rad jednak

$$\begin{aligned}
W &= \int_{0\,\mathrm{m}}^{5\,\mathrm{m}} F(x)\,dx = \int_{0\,\mathrm{m}}^{5\,\mathrm{m}} A\,(D-x)^2\,dx = A\int_{0\,\mathrm{m}}^{5\,\mathrm{m}} \left(D^2 - 2Dx + x^2\right) dx \\
&= A\,\frac{1}{3}x^3 - x^2 D + xD^2\Big|_{0\,\mathrm{m}}^{5\,\mathrm{m}} = A\cdot\left[\frac{(5\,\mathrm{m})^3}{3} - (5\,\mathrm{m})^2 D + (5\,\mathrm{m})\,D^2\right] \\
&= A\cdot\left(5\,\mathrm{m}D^2 - 25\,\mathrm{m}^2 D + 62.5\,\mathrm{m}^3\right) \\
&= 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot\left[5\,\mathrm{m}\cdot(5\,\mathrm{m})^2 - 25\,\mathrm{m}^2\cdot(5\,\mathrm{m}) + 41.667\,\mathrm{m}^3\right] \\
&= 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot 41.667\,\mathrm{m}^3 = 4166.7\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.10 *Automobil mase $m = 1500\,\mathrm{kg}$ giba se uz uspon nagiba 10% konstantnom brzinom od $v = 72\frac{\mathrm{km}}{h}$. Izračunajte potrebnu snagu. Koliki je rad motora za vrijeme $t = 2.5\,\mathrm{min}$ vožnje? Trenje zanemarite.*

Rješenje:

Urađeni rad motora jednak je radu dizanja automobila na visinu h. Ta visina jednaka je 10% duljine prijeđenog puta s

$$h = \frac{s}{10} = \frac{v\cdot t}{10}$$

pa je rad

$$\begin{aligned}
W &= mgh = mg\cdot\frac{vt}{10} = 1500\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 120\,\mathrm{s}}{10} \\
&= 3.\,53\cdot 10^6\,\mathrm{J} \approx 3.53\,\mathrm{MJ}
\end{aligned}$$

Uz zanemarenje trenja, potrebna snaga je

$$P = mg\cdot\frac{v}{10} = 1500\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10} = 29\ 430\,\mathrm{W}$$

pa je rad izračunat preko relacije za snagu

$$W = P\cdot t = 29\ 430\,\mathrm{kW}\cdot 120\,\mathrm{s} = 3.\,531\cdot 10^6\,\mathrm{J} \approx 3.53\,\mathrm{MJ}$$

Primjer 4.3.11 *Sportski automobil mase $m = 1350\,\mathrm{kg}$ može se na horizontalnoj cesti jednoliko ubrzati od $v_0 = 0\frac{\mathrm{km}}{h}$ do $v = 100\frac{\mathrm{km}}{h}$ za vrijeme od $t = 4.6\,\mathrm{s}$. Pretpostavivši da je koeficijent trenja $\mu = 0.1$ izračunajte:*

a) Kolika je vučna sila motora i koliki je prijeđeni put?

b) Kolika je maksimalna snaga koju motor pri tome razvije?

c) Kolika je srednja snaga na cijelome putu?

d) Kolika je trenutna snaga u trećoj sekundi ubrzavanja?

Rješenje:

a) Motor mora svladati silu trenja i istovremeno ubrzavati automobil pa je vučna sila jednaka

$$F = \mu mg + ma = m(\mu g + a)$$

Kako je ubrzanje

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{27.778\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4.6\,\mathrm{s}} = 6.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

dobivamo

$$F = 1350\,\mathrm{kg} \cdot \left(0.1 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 6.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 9476.6\,\mathrm{N}$$

Prijeđeni put jednak je

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 6.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (4.6\,\mathrm{s})^2 = 63.89\,\mathrm{m}$$

b) Maksimalna snaga jednaka je

$$P_{\max} = F \cdot v_{\max} = 9476.6\,\mathrm{N} \cdot 27.78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 263.24\,\mathrm{kW}$$

c) Da bismo izračunali srednju snagu, moramo izračunati ukupni rad za vrijeme t. Kako se automobil gibao u horizontalnoj ravnini, nije mu se mijenjala potencijalna energija, nego samo kinetička energija gibanja pa je ukupni rad jednak zbroju kinetičke energije automobila i utrošene energije zbog trenja. Rad sile trenja jednak je

$$\begin{aligned} W_{tr} &= \overrightarrow{F}_{tr} \cdot \overrightarrow{s} = F_{tr} \cdot s \cdot \cos\pi = -\mu mgs \\ &= -0.1 \cdot 1350\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 63.89\,\mathrm{m} = -84611\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

a kinetičke energija

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1350\,\mathrm{kg} \cdot \left(27.78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} = 520.84\,\mathrm{kJ}$$

pa je ukupni rad jednak

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + |W_{tr}| = 520.84\,\mathrm{kJ} + 84611\,\mathrm{J} = 605.45\,\mathrm{kJ}$$

Srednja snaga jednaka je

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{520.84\,\mathrm{kW}}{4.6\,\mathrm{s}} = 131.62\,\mathrm{kW} = \frac{P_{\max}}{2}$$

d) U trećoj sekundi gibanja brzina iznosi

$$v = at = 6.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3\,\mathrm{s} = 18.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

pa je snaga jednaka

$$P = Fv = 9476.6\,\mathrm{N} \cdot 18.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 171.68\,\mathrm{kW}$$

Primjer 4.3.12 *S vrha brijega dugog* $200\,\mathrm{m}$ *gurnute su saonice mase* $5\,\mathrm{kg}$ *brzinom* $2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Brzina saonica na dnu brijega je* $30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Visinska razlika između vrha i dna brijega je* $100\,\mathrm{m}$*. Izračunajte rad koji obavi gravitacijska sila na saonice koje se spuštaju. Izračunajte rad koji obavi sila trenja na saonice nakon spuštanja niz brijeg, Izračunajte koeficijent dinamičkog trenja između saonica i brijega.*

Rješenje:
Odnos duljine puta i visinske razlike definiraju kut α kao

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{h}{s} = \frac{1}{2} \\
\cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

rad gravitacijske sile računa se pomoću izraza

$$\begin{aligned}
W_g &= \int_A^B \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_A^B mg\sin\alpha \cdot dr = \int_0^s mg\sin\alpha \cdot ds \\
&= mg\sin\alpha \cdot \int_0^s ds = mg\sin\alpha \cdot s = mgh \\
&= 5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\,\mathrm{m} = 4905\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Rad sile trenja dobiva se iz odnosa promjene energije i rada

$$\begin{aligned}
\Delta W &= E_{k,B} - E_{k,A} \\
W_g + W_{tr} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\
W_{tr} &= \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) - W_g \\
&= \frac{1}{2}\cdot 5\,\mathrm{kg}\cdot\left[\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] - 4905\,\mathrm{J} \\
&= 2240\,\mathrm{J} - 4905\,\mathrm{J} = -2665\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Koeficijent trenja između saonica i podloge dobiva se pomoću dinamičke veze rada trenja

$$\begin{aligned}
W_{tr} &= -\mu mgs\cos\alpha = -\mu mgs\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\mu &= \frac{-2W_{tr}}{mgs\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 2665\,\mathrm{J}}{5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 200\,\mathrm{m}\sqrt{3}} = 0.3137
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.13 *Sila $F = At$ djeluje na česticu mase m ubrzavajući je od mirovanja. Koliki je rad te sile nakon vremena t?*

Rješenje:
Koristeći definiciju rada

$$W = \int_0^s F ds = \int_0^t F v dt$$

Brzina je iz II. Newtonova zakona jednaka

$$\begin{aligned}
F &= At = m\frac{dv}{dt} \\
dv &= \frac{A}{m}tdt / \int \\
\int_0^{v(t)} dv &= \frac{A}{m}\int_0^t tdt \\
v\left(t\right) &= \frac{At^2}{2m}
\end{aligned}$$

pa je

$$W = \int_0^t F v dt = \int_0^t At \cdot \frac{At^2}{2m} dt = \frac{A^2}{2m} \int_0^t t^3 dt = \frac{A^2 t^4}{8m}$$

s obzirom da je djelovanje sile utrošeno na promjenu brzine

$$W = E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{At^2}{2m}\right)^2 = \frac{A^2 t^4}{8m}$$

Primjer 4.3.14 *Vrijednost vektora položaja materijalne točke iznosi* $\overrightarrow{r}_1 = \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$ m. *Pod djelovanjem sile* $\overrightarrow{F} = \left(5\overrightarrow{i}\right)$ N *materijalna točka počinje se gibati i u nekom trenutku njen vektor položaja iznosi* $\overrightarrow{r}_2 = \left(6\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right)$ m. *Koliki je rad izvršila sila pri pomicanju materijalne točke?*

Rješenje:
Rad koji je izvršila sila iznosi

$$\begin{aligned} W &= \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1) \\ &= \left(5\overrightarrow{i}\right) \mathrm{N} \cdot \left(5\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}\right) \mathrm{m} = 25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Napomena: Da bi se tijelo našlo u položaju $\overrightarrow{r}_2$ tijelo mora imati neku početnu brzinu (i)/ili moraju postojati komponente sile u drugim smjerovima koje nismo razmatrali.

Primjer 4.3.15 *Matematičko njihalo, duljine niti* $l = 40$ cm *i mase* $m = 0.5$ kg, *ima otklon* $\varphi_0 = 50°$. *Primjenom zakona održanja mehaničke energije izračunajte brzinu tijela kada prolazi kroz ravnotežni položaj? Kolika je ukupna energija tog njihala?*

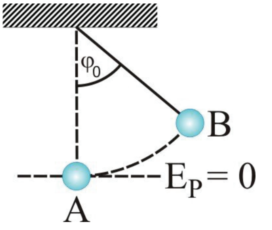
Rješenje:
Zakon održanja mehaničke energije glasi

$$E_k + E_p = E_{uk} = konst.$$

Neka je ravnotežni položaj referentna razina potencijalne energije definirana za najnižu točku putanje A.

Tada vrijedi (slika 4.21.) da je $E_p^A = 0$, odnosno

$$
\begin{aligned}
E_{uk} &= E_{uk_A} = E_{uk_B} \\
E_{uk} &= E_{k_A} + \underbrace{E_{p_A}}_{=0} = \underbrace{E_{k_B}}_{=0} + E_{p_B} \\
E_{uk} &= E_{p_B} = mgl \cdot (1 - \cos\varphi_0) = 0.7 \text{ J} \\
E_{uk} &= E_{k_A} = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2
\end{aligned}
$$



Slika 4.21.

odakle se za brzinu u točki A dobiva

$$v_A = \sqrt{\frac{2E_{uk}}{m}} = \sqrt{2gl\,(1-\cos\varphi_0)} = 1.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Primjer 4.3.16 *Automobil mase* $m = 1250\,\text{kg}$ *na vodoravnoj cesti razvija brzinu* $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{h}$ *i zatim nastavlja vožnju isključenim motorom. Nakon koliko vremena* t' *mu se brzina smanjuje na* $v = \frac{v_0}{2}$ *ako je otpor gibanju proporcionalan kvadratu brzine (konstanta proporcionalnosti* $k = 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$*). Izračunajte rad sila otpora za to vrijeme.*

Rješenje:

Sila otpora je proporcionalna kvadratu brzine

$$F_{ot} = -kv^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$$

Ovisnost brzine o vremenu dobivamo iz

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= -kv^2 \implies \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt \Big/ \int \\
\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} &= -\frac{k}{m}\int_0^t dt \implies t = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) \implies v\,(t) = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}
\end{aligned}
$$

Iz uvjeta da je brzina $v\,(t) = \frac{v_0}{2}$ u trenutku t' dobivamo

$$v\,(t') = \frac{v_0}{2} = \frac{mv_0}{m + kv_0 t'} \implies t' = \frac{m}{kv_0} = \frac{1250\,\text{kg}}{1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 50\,\text{s}$$

Rad sila otpora do trenutka t' jednak je

$$\begin{aligned}
W_{ot}\left(t'\right) &= \int_0^{s(t')} \overrightarrow{F}_{ot} \cdot d\overrightarrow{s} = \int_0^{t'} -kv^2 \cdot vdt = -k\int_0^{t'} v^3 dt \\
&= -k\int_0^{t'} \left(\frac{mv_0}{m+kv_0t}\right)^3 dt = -k\int_0^{t'} \frac{m^3v_0^3}{(m+kv_0t)^3}dt \\
&= -m^3k\left(-\frac{1}{2}\frac{v_0^3}{kv_0\left(m+kv_0t\right)^2}\right)\Big|_0^{t'} \\
&= -m^3k\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{k\left(m+kv_0t'\right)^2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{km^2}\right)\right] \\
&= \frac{m^3k}{2}\left[\frac{v_0^2}{4km^2}-\frac{v_0^2}{km^2}\right] = \frac{m^3k}{2}\left(-\frac{3v_0^2}{4km^2}\right) = -\frac{3}{8}mv_0^2 \\
&= -\frac{3}{8}\cdot 1250\,\mathrm{kg}\cdot\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = -187500\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Taj se rad može izračunati i iz činjenice da je jednak promjeni kinetičke energije automobila

$$W_{ot} = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3}{8}mv_0^2 = -187500\,\mathrm{J}$$

Primjer 4.3.17 *Viseći luster mase $m = 6\,\mathrm{kg}$ otkloni se za kut $\alpha = 45°$ i pusti. Kolika je maksimalna sila kojom luster opterećuje plafon?*

Rješenje:

Ukupna sila jednaka je zbroju komponente težine i centrifugalne sile i u položaju određenom kutom $\beta \leq \alpha$ iznosi

$$\begin{aligned}
F_{uk} &= G_N + F_{cf} \\
&= mg\cos\beta + \frac{mv^2}{l} \\
&= mg\cos\beta + \frac{m\cdot 2gl\cdot(\cos\beta - \cos\alpha)}{l} \\
&= mg\cdot(3\cos\beta - 2\cos\alpha)
\end{aligned}$$

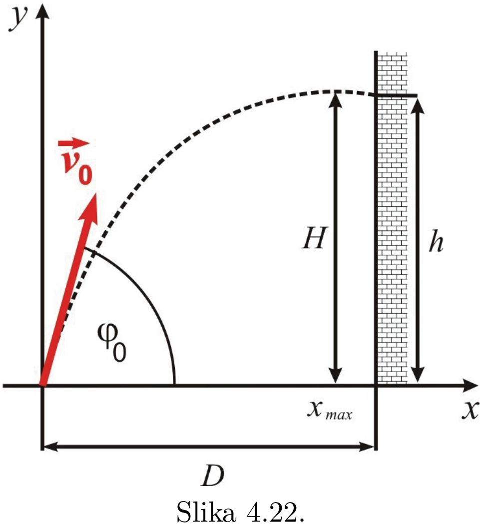
gdje brzinu v dobivamo iz zakona očuvanja energije

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\left(\cos\beta - \cos\alpha\right)}$$

koja ima maksimalnu vrijednost za kut $\beta = 0$. Maksimalna sila kojom luster opterećuje plafon bit će u ravnotežnom položaju (najniža točka gibanja gdje je najveća komponenta težine i najveća brzina, odnosno centrifugalna sila)

$$
\begin{aligned}
F_{\max} &= mg \cdot (3\cos\beta - 2\cos\alpha) \\
&= mg \cdot (3\cos 0 - 2\cos 45) \\
&= 6\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 93.34\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Primjer 4.3.18 *Čovjek je udaljen $D = 10\,\mathrm{m}$ od vertikalnog zida i gađa ga teniskom lopticom mase $m = 50\,\mathrm{g}$ početnom brzinom $v_0 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Izabere li kut izbačaja α_0 pri kojem će pogoditi zid na najvišem mogućem mjestu, koliki je taj kut, visina h gdje će loptica pogoditi i vrijeme t' kad će pogoditi zid. Kolika će pri tome biti kinetička energija E_k loptice u trenutku udara o zid i maksimalna visina H koju će dosegnuti loptica.*



Slika 4.22.

Rješenje:

Postavimo li koordinatni sustav tako da loptica polijeće iz ishodišta, a os x postavimo horizontalno, opis gibanja u parametarskom obliku glasi:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= 0 \\
\dot{x}(t) &= const. = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\
x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\
\ddot{y}(t) &= -g \\
\dot{y}(t) &= -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\alpha \\
y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha
\end{aligned}$$

Eliminacijom parametra t dolazimo do putanje tijela u eksplicitnom obliku koja je parabola s otvorom prema dolje

$$y(x) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + (\tan\alpha)\, x$$

u ovoj funkciji je još moguće mijenjati kut izbačaja α pa jednadžbu mogu pisati i u ovisnosti o kutu α.

$$y(\alpha) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + (\tan\alpha)\, x$$

Iz uvjeta da visina na kojoj loptica pogađa zid bude maksimalna $\left.\frac{dy}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = 0$, tj. y maksimalna kada je $x = D$, dobiva se

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} &= \left.\left[-\frac{gD^2}{2v_0^2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + D\frac{d}{d\alpha}(\tan\alpha)\right]\right|_{\alpha=\alpha_0} \\
&= -\frac{gD^2 \sin\alpha_0}{v_0^2 \cos^3\alpha_0} + \frac{D}{\cos^2\alpha_0} = 0
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
1 - \frac{gD}{v_0^2}\tan\alpha_0 &= 0 \Longrightarrow \tan\alpha_0 = \frac{v_0^2}{gD} \\
\alpha_0 &= \arctan\frac{v_0^2}{gD} = \arctan\frac{\left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 10\,\mathrm{m}} = 66.43^\circ
\end{aligned}$$

Maksimalnu visinu h dobit ćemo iz vrijednosti funkcije y za kut α_0 kada je $x = D$

$$y(\alpha_0) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}\right) D^2 + (\tan\alpha_0)\, D = h$$

No, kako je

$$\begin{aligned}
\tan\alpha_0 &= \frac{v_0^2}{gD} \\
\cos^2\alpha_0 &= \frac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \frac{1}{1+\frac{v_0^4}{g^2D^2}} = \frac{g^2D^2}{v_0^4+g^2D^2}
\end{aligned}$$

imamo

$$h = -\frac{gD^2}{2v_0^2}\cdot\frac{v_0^4+g^2D^2}{g^2D^2} + \frac{v_0^2}{gD}\cdot D = \frac{v_0^4-g^2D^2}{2v_0^2 g} = 9.29\,\mathrm{m}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{v}_x + \overrightarrow{v}_y = (v_0\cos\alpha_0)\,\overrightarrow{i} + \left(v_0\sin\alpha_0 - gt'\right)\overrightarrow{j} \\
x &= D = v_0 t'\cos\alpha_0 \Longrightarrow t' = \frac{D}{v_0\cos\alpha_0} = \frac{10\,\mathrm{m}}{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos 66.43} = 1.67\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2 = \frac{m}{2}\left(v_x^2+v_y^2\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(v_0^2\cos^2\alpha_0 + v_0^2\sin^2\alpha_0 - 2gv_0t'\sin\alpha_0 + g^2t'^2\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2gv_0\frac{D}{v_0\cos\alpha_0}\sin\alpha_0 + g^2\frac{D^2}{v_0^2\cos^2\alpha_0}\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2gD\tan\alpha_0 + \frac{g^2D^2}{v_0^2}\frac{v_0^4+g^2D^2}{g^2D^2}\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2v_0^2 + \frac{v_0^4+g^2D^2}{v_0^2}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{g^2D^2}{v_0^2}\right)
\end{aligned}$$

$$E_k = \frac{0.05\,\mathrm{kg}}{2}\left[\frac{\left(9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2(10\,\mathrm{m})^2}{\left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}\right] = 1.07\,\mathrm{J}$$

Maksimalna visina dobije se iz uvjeta $\frac{dy}{dx} = 0$, uz $\alpha = \alpha_0$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}\right)x^2 + \tan\alpha_0 \cdot x\right]_{x=x_{\max}} \\
&= \left[-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}\cdot 2x + \tan\alpha_0\right]_{x=x_{\max}} = 0 \\
\tan\alpha_0 &= -\frac{gx_{\max}}{v_0^2\cos^2\alpha_0} \\
x_{\max} &= \frac{v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} = \frac{\left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot\sin 66.43\cdot\cos 66.43}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.84\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

pa se iz uvjeta $H = y\left(x_{\max}\right)$ dobiva

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}\left(\frac{v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g}\right)^2 + \tan\alpha_0\frac{v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} \\
&= -\frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g} = 9.67\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Uočimo da smo za H ponovo dobili izraz maksimalne visine za kosi hitac, te da je $x_{\max} < D$ i $h < H$.

Primjer 4.3.19 *Na zaustavljenom željezničkom vagonu, mase* $m_1 = 8000\,\mathrm{kg}$*, nalazi se raketna rampa s koje rakete polijeću brzinom* $v_0 = 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$*. Istovremeno se lansiraju dvije rakete, svaka mase* $m_2 = 80\,\mathrm{kg}$*, u horizontalnom pravcu koji se poklapa s pravcem tračnica. Za koliko se vagon pomjeri, ako je koeficijent trenja pri gibanju vagona* $\mu = 0.06$*?*

Rješenje:

Prilikom lansiranja raketa, po zakonu o očuvanju količine gibanja, vagon dobiva početnu brzinu v_1 suprotnoga smjera, od smjera gibanja raketa, iznosa

$$\begin{aligned}
v_1 m_1 &= 2m_2v_2 \\
v_1 &= \frac{2m_2v_2}{m_1} = \frac{2\cdot 80\,\mathrm{kg}\cdot 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{8000\,\mathrm{kg}} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Sada na vagon djeluje samo sila trenja i usporava ga. Sila trenja jednaka je

$$F_{tr} = \mu R = \mu G = \mu mg$$

jer je vagon na horizontalnim tračnicama. Zbog toga vagon usporava

$$ma = \mu mg \Rightarrow a = \mu g = 0.06 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.59 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Dakle, radi se o jednoliko usporenom gibanju sa početnom brzinom. Prijeđeni put iznosi

$$s = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{\left(20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.59 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 339.79\,\mathrm{m}$$

Primjer 4.3.20 *Čovjek skoči u bazen sa daske koja se nalazi* $3.25\,\mathrm{m}$ *iznad površine vode. Pomoću zakona očuvanja energije izračunajte brzinu čovjeka neposredno prije ulaska u vodu ako skoči prema dolje brzinom* $2.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*, odnosno prema gore istom brzinom? Uporedite dobivene rezultate.*

Rješenje:

Ako čovjek skoči prema dolje, to je hitac naniže. Koristeći zakon očuvanja energije za konačnu brzinu se dobiva

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 \\ E_{k,2} + E_{p,2} &= E_{k,1} + E_{p,1} \end{aligned}$$

Ako se površina vode uzme za referentnu razinu potencijalne energije $E_{p,2} = mgh_2 = 0$, tada je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_2^2 + 0 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 \\ v_2^2 &= v_1^2 + 2gh_1 \\ v_2 &= \sqrt{v_1^2 + 2gh_1} = \sqrt{\left(2.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3.25\,\mathrm{m}} \\ &= 8.37 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Ako skoči u vis istom početnom brzinom, ukupna početna energija je jednaka, pa je i brzina jednaka $v_2' = 8.37 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zaključuje se da je brzina jednaka u oba slučaja. Ako bi čovjek skočio u horizontalnom smjeru (ili pod nekim kutom) iznos brzine pri površini vode bi opet bio jednak, samo bi kut pod kojim čovjek ulazi u vodu bio različit (ulazak u vodu ne bi bio okomit kao u ova dva slučaja).

Primjer 4.3.21 *Duž glatke žice koja je savijena u kružnicu polumjera* $r = 1.5\,\mathrm{m}$ *i leži u horizontalnoj ravnini, pomiče se materijalna točka* M *pod djelovanjem konstantne sile* $F = 150\,\mathrm{N}$*, koja je uvijek u smjeru tangente na krug. Izračunajte rad koji ova sila izvrši pri premještanju materijalne točke* M *iz položaja* A $(\varphi = 0)$ *do položaja* B $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Rješenje:

Elementarni rad W sile $\overrightarrow{F}$ na diferencijalnom elementu duljine puta $d\overrightarrow{s}$ jednak je

$$W = \oint \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$$

Kako su $\overrightarrow{F}$ i $d\overrightarrow{s}$ uvijek u istom smjeru (i leže na pravcu tangente na kružnicu) dobivamo

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B F ds = F \int_A^B ds = F \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi = rF \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{Fr\pi}{2} \\ &= \frac{150\,\mathrm{N} \cdot 1.5\,\mathrm{m} \cdot \pi}{2} = 112.5\pi\,\mathrm{J} = 353.43\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.22 *Tijelo kliže brzinom* $4.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *po horizontalnoj podlozi. U točki* P *tijelo naiđe na hrapavu površinu. Na hrapavoj površini koeficijent trenja se mijenja linearno, tako da u točki* P *ima vrijednost* 0.1*, a u točki udaljenoj* $12.5\,\mathrm{m}$ *od točke* P *koeficijent ima vrjednost* 0.6*. Koliku udaljenost će tijelo prijeći po hrapavom dijelu podloge do zaustavljanja.*

Rješenje:

Sila trenja koja djeluje na tijelo na horizontalnoj podlozi jednaka je

$$F_{tr}(x) = -\mu(x)\, mg$$

gdje treba iz početnih uvjeta pronaći koeficijente linearne ovisnosti trenja o položaju. U početnom položaju je

$$\begin{aligned}
\mu(0) &= 0.1 \\
\mu(x) &= kx + l = kx + 0.1 \\
\mu(12.5\,\mathrm{m}) &= k \cdot 12.5\,\mathrm{m} + 0.1 = 0.6 \\
k \cdot 12.5\,\mathrm{m} &= 0.5 \\
k &= \frac{0.5}{12.5\,\mathrm{m}} = 0.04\,\mathrm{m}^{-1} \\
\mu(x) &= \left(0.04\,\mathrm{m}^{-1}\right) \cdot x + 0.1
\end{aligned}$$

Konačna brzina tijela jednaka je nuli. Iz poučka o radu i kinetičkoj energiji slijedi

$$\begin{aligned}
\Delta W &= W_{tr} = \Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} \\
W_{tr} &= \int_0^x F_{tr} \cdot dx = \int_0^x -\mu(x)\, mg \cdot dx = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2
\end{aligned}$$

Uvrštavajući funkciju koeficijenta trenja slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m v_0^2 &= mg \int_0^x \mu(x)\, dx \\
\frac{v_0^2}{2g} &= \int_0^x \mu(x)\, dx = \int_0^x \left[\left(0.04\,\mathrm{m}^{-1}\right) \cdot x + 0.1\right] dx \\
&= \left[\left(0.04\,\mathrm{m}^{-1}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + 0.1 \cdot x\right]\Bigg|_0^x \\
&= \left(0.02\,\mathrm{m}^{-1}\right) \cdot x^2 + 0.1 \cdot x
\end{aligned}$$

Dobila se kvadratna jednadžba čija rješenja x daju prijeđeni put do zaustavljanja

$$0 = \left(0.02\,\mathrm{m}^{-1}\right) \cdot x^2 + 0.1 \cdot x - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)$$

što uz vrijednost

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(4.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.032\,1\,\mathrm{m}$$

daje

$$\begin{aligned}
0 &= \left(0.02\,\mathrm{m}^{-1}\right)\cdot x^2 + 0.1\cdot x - 1.032\,1\,\mathrm{m} \\
x_{1,2} &= \frac{-0.1 \pm \sqrt{(0.1)^2 - 4\cdot\left(0.02\,\mathrm{m}^{-1}\right)\cdot\left(-1.032\,1\,\mathrm{m}\right)}}{2\cdot 0.02\,\mathrm{m}^{-1}} \\
&= \frac{-0.1 \pm 0.304\,25}{0.04\,\mathrm{m}^{-1}} \\
x_1 &= \frac{-0.1 + 0.304\,25}{0.04\,\mathrm{m}^{-1}} = 5.106\,3\,\mathrm{m} \approx 5.11\,\mathrm{m} \\
x_2 &= \frac{-0.1 - 0.304\,25}{0.04\,\mathrm{m}^{-1}} = -10.106\,\mathrm{m} \text{ - nema fizikalni smisao}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.23 *Tijelo mase m giba se po krugu polumjera R, tako da mu normalno ubrzanje ovisi o vremenu, po zakonu $a_n = kt^2$, gdje je k - konstanta.*

a) Odredite ukupnu silu koja djeluje na ovo tijelo u funkciji vremena.

b) Kolika je snaga potrebna za ovakvo gibanje tijela?

c) Kolika je srednja vrijednost ove snage tijekom vremenskog intervala t od početka gibanja?

Rješenje:

a) Prema pretpostavci zadatka vrijedi

$$a_n = kt^2 = \frac{v^2}{R} \implies v = \sqrt{kRt^2} = \sqrt{kR}\cdot t$$

Tangencijalno ubrzanje je po definiciji

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{kR}$$

a sila

$$F = ma = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2} = m\sqrt{k^2t^4 + kR}$$

b) Prema definiciji snaga je jednaka skalarnom umnošku sile i brzine

$$P = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v} = m\left(\overrightarrow{a}_n + \overrightarrow{a}_t\right)\overrightarrow{v} = ma_tv = m\cdot\sqrt{kR}\cdot\sqrt{kR}t = mkRt$$

jer je $\overrightarrow{a}_n \perp \overrightarrow{v}$, pa je $\overrightarrow{a}_n\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

c) Srednja snaga jednaka je

$$\overline{P} = \frac{P_0 + P}{2} = \frac{mkR}{2} \cdot t$$

Primjer 4.3.24 *Kinetička energija tijela koje se giba po krugu polumjera R ovisi o prijeđenom putu s po zakonu $E_k = ks^2$, gdje je k - konstanta. Odredi ovisnost sile koja djeluje na ovo tijelo od prijeđenog puta.*

Rješenje:
Iz jednadžbe

$$E_k = ks^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

dobivamo

$$v^2 = \frac{2ks^2}{m} \implies v = \sqrt{\frac{2k}{m}}s$$

Prema II. Newtonovu zakonu slijedi

$$F = ma = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

gdje je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{2ks^2}{m}}{R} = \frac{2ks^2}{mR} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v = \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2k}{m}}s = \frac{2ks}{m} \end{aligned}$$

Sada je sila jednaka

$$F = m\sqrt{\left(\frac{2ks^2}{mR}\right)^2 + \left(\frac{2ks}{m}\right)^2} = \frac{2ks}{R}\sqrt{s^2 + R^2}$$

Primjer 4.3.25 *Mehanički stroj vrši rad koji se u vremenu mijenja po zakonu*

$$W = A\sqrt[3]{Bt^2 - C}$$

gdje je $A = 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}$, $B = 3\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}$ i $C = 5\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^3$. Kolika je trenutna vrijednost snage koju razvija mehanički stroj u 5. sekundi vremena od početka vršenja rada?

Rješenje:

Prema definiciji, trenutna snaga P jednaka je prvoj derivaciji rada po vremenu, odnosno

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\sqrt[3]{Bt^2 - C}\right) = -\frac{2}{3}ABt\frac{\sqrt[3]{Bt^2 - C}}{C - Bt^2}$$

pa je u petoj sekundi

$$P(5\,\mathrm{s}) = -\frac{2}{3}\cdot 10^4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\cdot 3\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}\cdot 5\,\mathrm{s}\cdot\frac{\sqrt[3]{3\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}\cdot(5\,\mathrm{s})^2 - 5\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^3}}{5\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^3 - 3\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}\cdot(5\,\mathrm{s})^2} = 5887.6\,\mathrm{W}$$

Primjer 4.3.26 *Tijelo mase $m = 5\,\mathrm{kg}$ počne se gibati pod djelovanjem sile opisane zakonom $\overrightarrow{F}(t) = At\overrightarrow{i} + Bt^2\overrightarrow{j}$, gdje su $A = 3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}$ i $B = 10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}$ konstante. Kolika je sila, komponente ubrzanja i brzina te snaga koju razvije ova sila nakon nekog vremena $t' = 2\,\mathrm{s}$ od početka gibanja?*

Rješenje:

Kako je sila

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}(t) &= ma_x\overrightarrow{i} + ma_y\overrightarrow{j} = At\overrightarrow{i} + Bt^2\overrightarrow{j} \\
\overrightarrow{F}(t') &= At'\overrightarrow{i} + Bt'^2\overrightarrow{j} \\
&= \left[3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\cdot 2\,\mathrm{s}\,\overrightarrow{i} + 10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}(2\,\mathrm{s})^2\,\overrightarrow{j}\right] = \left(6\overrightarrow{i} + 40\overrightarrow{j}\right)\mathrm{N}
\end{aligned}$$

to su komponente ubrzanja

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= \frac{A}{m}t \Longrightarrow a_x(t') = \frac{A}{m}t' = \frac{3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}{5\,\mathrm{kg}}\cdot 2\,\mathrm{s} = 1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
a_y(t) &= \frac{B}{m}t^2 \Longrightarrow a_y(t') = \frac{B}{m}t'^2 = \frac{10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}}{5\,\mathrm{kg}}\cdot(2\,\mathrm{s})^2 = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

pa su odgovarajuće komponente brzine

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= \int_0^t a_x dt = \int_0^t \frac{A}{m}tdt = \frac{A}{m}\int_0^t tdt = \frac{A}{m}\frac{t^2}{2} \\
v_y(t) &= \int_0^t a_y dt = \int_0^t \frac{B}{m}t^2 = \frac{B}{m}\int_0^t t^2dt = \frac{B}{m}\frac{t^3}{3}
\end{aligned}$$

što nakon uvrštavanja vremena t' daje

$$\begin{aligned}
v_x\left(t'\right) &= \int_0^{t'} a_x dt = \frac{A}{m}\frac{t'^2}{2} = \frac{3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}}{5\,\mathrm{kg}}\frac{(2\,\mathrm{s})^2}{2} = 1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_y\left(t'\right) &= \int_0^{t'} a_y dt = \frac{B}{m}\frac{t'^3}{3} = \frac{10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}}{5\,\mathrm{kg}}\frac{(2\,\mathrm{s})^3}{3} = 5.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

pa je snaga jednaka

$$\begin{aligned}
P(t) &= \overrightarrow{F}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t) \\
&= \left[ma_x(t)\,\overrightarrow{i} + ma_y(t)\,\overrightarrow{j}\right]\cdot\left(v_x(t)\,\overrightarrow{i} + v_y(t)\,\overrightarrow{j}\right) \\
&= m\left[a_x(t)\cdot v_x(t) + a_y(t)\cdot v_y(t)\right] \\
&= m\cdot\left[\frac{A}{m}t\cdot\frac{A}{m}\frac{t^2}{2} + \frac{B}{m}t^2\cdot\frac{B}{m}\frac{t^3}{3}\right] \\
&= m\cdot\left[\frac{A^2t^3}{2m^2} + \frac{B^2t^5}{3m^2}\right] \\
&= \frac{3A^2 + 2B^2t^2}{6m}\cdot t^3
\end{aligned}$$

odnosno u trenutku t'

$$\begin{aligned}
P\left(t'\right) &= \frac{3A^2 + 2B^2\left(t'\right)^2}{6m}\cdot\left(t'\right)^3 \\
&= \frac{3\left(3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2\left(10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}\right)^2(2\,\mathrm{s})^2}{6\cdot 5\,\mathrm{kg}}\cdot(2\,\mathrm{s})^3 = 220.53\,\mathrm{W}
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
P\left(t'\right) &= ma_x\left(t'\right)\cdot v_x\left(t'\right) + ma_y\left(t'\right)\cdot v_y\left(t'\right) \\
&= m\cdot\left[a_x\left(t'\right)\cdot v_x\left(t'\right) + a_y\left(t'\right)\cdot v_y\left(t'\right)\right] \\
&= 5\,\mathrm{kg}\cdot\left[1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 5.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = 220.53\,\mathrm{W}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.27 *Jedrilica mase* $m = 1500\,\mathrm{kg}$ *giba se pod djelovanjem vjetra konstantne brzine, tako da je ovisnost prijeđenog puta jedrilice opisan zakonom* $s = \left(5t^2 + 2t + 5\right)\,\mathrm{m}$. *Koliki rad izvrši vjetar pri pokretanju jedrilice tijekom prve* $4\,\mathrm{s}$*? Koliku snagu razvija vjetar u tom trenutku?*

Rješenje:
Rad vjetra jednak je

$$\begin{aligned} W(t) &= \Delta E_k = E_k(t) - E_k(0) = \frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}mv^2(0) \\ &= \frac{m}{2}\left[v^2(t) - v^2(0)\right] \end{aligned}$$

gdje je brzina

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2 + 2t + 5\right) = (10t + 2)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v(4) &= 42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad v(0) = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Koristeći izraz za brzinu, dobivamo izraz za rad u prvih t sekundi

$$W(t) = \frac{1}{2}m\left[v^2(t) - v_0^2\right]$$

što je za prve četiri sekunde iznosi

$$\begin{aligned} W(4) &= \frac{1}{2}\cdot 1500\,\mathrm{kg}\cdot\left[\left(42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] \\ &= 1320\,000\,\mathrm{J} = 1.32\,\mathrm{MJ} \end{aligned}$$

Trenutna snaga vjetra je

$$\begin{aligned} P(t) &= F(t)\cdot v(t) = ma(t)\cdot v(t) \\ &= 10m\cdot(10t + 2) = (100mt + 20m)\ \mathrm{W} \\ P(4) &= ma(4)\cdot v(4) = 1500\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\left(42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \\ &= 630\,000\,\mathrm{W} = 630\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

gdje je

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(10t + 2) = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Primjer 4.3.28 *Dvije kugle jednake mase gibaju se duž pravca u istom smjeru brzinama $v_1 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $v_2 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolika je brzina kugli nakon savršeno neelastičnog sudara, poslije kojeg se kugle slijepljene gibaju zajedno?*

Rješenje:

Kugle su jednakih masa, $m = m_1 = m_2$, pa prema zakonu očuvanja količine gibanja vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i &= konst.\\ m_1 \overrightarrow{v}_1 + m_2 \overrightarrow{v}_2 &= (m_1 + m_2)\overrightarrow{v}'\end{aligned}$$

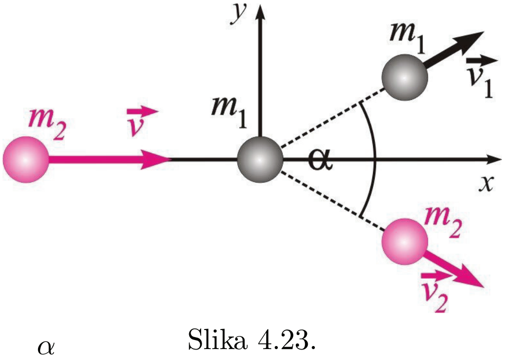
kako se ova dva tijela gibaju po istom pracu i u istom smjeru imamo

$$\begin{aligned}m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v'\\ v' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(v_1 + v_2)}{2m} = \frac{v_1 + v_2}{2}\\ &= \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 7.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Primjer 4.3.29 *Čestica mase m_1 koja miruje, sudari se elastično sa česticom mase m_2. Pri tome se čestice elastično odbiju i to simetrično na upadni pravac gibanja čestice mase m_2. Odredite odnos $\frac{m_2}{m_1}$ ako poslije sudara kut između gibanja čestica iznosi $\alpha = 60°$.*

Rješenje:

Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da se pozitivni smjer osi x poklapa sa upadnim smjerom čestice mase m_2. Primjenjujući zakon očuvanja količine gibanja na pojedine koordinatne osi imamo:



Slika 4.23.

$$\begin{aligned}m_2 v &= m_1 v_1 \cos\frac{\alpha}{2} + m_2 v_2 \cos\frac{\alpha}{2}\\ 0 &= m_2 v_2 \sin\frac{\alpha}{2} - m_1 v_1 \sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}m_1 v_1 &= m_2 v_2\\ v &= 2 v_2 \cos\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

Primjenom zakona očuvanja kinetičke energije dobivamo

$$
\begin{aligned}
(E_k)_{po\check{c}} &= (E_k)_{kon} \\
\frac{1}{2}m_2v^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
v^2 &= \frac{m_1}{m_2}v_1^2 + v_2^2 \\
v^2 &= \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_2}{m_1}v_2\right)^2 + v_2^2 = \left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)v_2^2 \\
\frac{m_2}{m_1} &= \left(\frac{v}{v_2}\right)^2 - 1 = 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 4\cos^2 30 - 1 \\
&= 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = 2
\end{aligned}
$$

Primjer 4.3.30 *Tijelo mase* $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ *gibajući se jednoliko po pravcu brzinom* $v_1 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *sustigne drugo tijelo mase* $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ *koje se giba brzinom* $v_2 = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Tijela se centralno neelastično sudare i nakon sudara gibaju zajedno. Odredite brzinu gibanja tijela nakon sudara. Kolika bi bila brzina gibanja tijela nakon neelastičnog sudara da su se ona gibala u suprotnim smjerovima?*

Rješenje:

Tijela se gibaju u istom smjeru po istom pravcu, pa vrijedi po zakonu očuvanja količine gibanja

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i &= konst. \\
m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= (m_1+m_2)\,\vec{v}\,'
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
m_1v_1 + m_2v_2 &= (m_1+m_2)\,v' \\
v' &= \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} \\
&= \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2\,\mathrm{kg}\cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\,\mathrm{kg}+2\,\mathrm{kg}} = \frac{13\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3\,\mathrm{kg}} = 4.\dot{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Da su se gibala jedno nasuprot drugom

$$\begin{aligned} m_1v_1 - m_2v_2 &= (m_1+m_2)\,v' \\ v' &= \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\,\mathrm{kg}\cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\,\mathrm{kg}+2\,\mathrm{kg}} = \frac{-3\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3\,\mathrm{kg}} = -1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

odnosno gibala bi se brzinom od $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ u smjeru gibanja drugog tijela.

Primjer 4.3.31 *Kugla mase $m_1 = m$ giba se brzinom $\vec{v} = \vec{v}_1$ po horizontalnoj podlozi bez trenja i udari u mirnu kuglu mase $m_2 = \frac{m}{2}$. Sudar je centralni i elastični. Odredite brzine kugli nakon sudara? Trenje zanemarite.*

Rješenje:

Za centralno elastični sudar vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \frac{(m_1-m_2)\,\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{\left(m-\frac{m}{2}\right)\vec{v}_1 + 2\frac{m}{2}\cdot 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{m+\frac{m}{2}} = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{3m}{2}}\vec{v}_1 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 &= \frac{(m_2-m_1)\,\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} \\ &= \frac{\left(\frac{m}{2}-m\right)\cdot 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2m\vec{v}_1}{m+\frac{m}{2}} = \frac{2m\vec{v}_1}{\frac{3m}{2}} = \frac{4}{3}\vec{v}_1 \end{aligned}$$

Primjer 4.3.32 *Molekula kisika O_2 brzine $v_{O_2} = 250\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sudari se centralno i elastično s molekulom CO_2 kojoj je brzina $v_{CO_2} = 110\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Odredite brzine molekula nakon sudara, ako se one sudaraju prilikom gibanja u istom smjeru, odnosno u suprotnome smjeru. Uzeti u obzir da je $\frac{m_{O_2}}{m_{CO_2}} = \frac{32}{44}$.*

Rješenje:

Odnos masa jednak je $m_{O_2} = \frac{8}{11}m_{CO_2}$. Označimo mase sa $m_1 = m_{O_2}$, a $m_{CO_2} = m_2$, a $v_1 = v_{O_2}$, te $v_2 = v_{CO_2}$. Ako se molekule sudaraju prilikom gibanja u istom smjeru imamo

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)\,\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_{O_2} - m_{CO_2})\,\vec{v}_1 + 2m_{CO_2}\vec{v}_2}{m_{O_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{-\frac{3}{11}m_{CO_2} \cdot 250\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \cdot m_{CO_2} \cdot 110\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{8}{11}m_{CO_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{-\frac{750}{11} + 220}{\frac{19}{11}}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 87.\,89\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)\,\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_{CO_2} - m_{O_2})\,\vec{v}_2 + 2m_{O_2}\vec{v}_1}{m_{O_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{\frac{3}{11}m_{CO_2} \cdot 110\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{16}{11} \cdot m_{CO_2} \cdot 250\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{8}{11}m_{CO_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{\frac{330}{11} + \frac{4000}{11}}{\frac{19}{11}}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 227.\,89\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

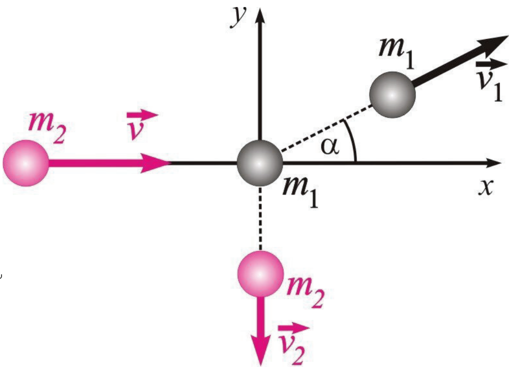
ako se sudaraju prilikom gibanja u različitim smjerovima

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)\,\vec{v}_1 - 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_{O_2} - m_{CO_2})\,\vec{v}_1 - 2m_{CO_2}\vec{v}_2}{m_{O_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{-\frac{3}{11}m_{CO_2} \cdot 250\frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \cdot m_{CO_2} \cdot 110\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{8}{11}m_{CO_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{-\frac{750}{11} - 220}{\frac{19}{11}}\frac{\text{m}}{\text{s}} = -166.\,84\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)\,\vec{v}_2 - 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_{CO_2} - m_{O_2})\,\vec{v}_2 - 2m_{O_2}\vec{v}_1}{m_{O_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{\frac{3}{11}m_{CO_2} \cdot 110\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{16}{11} \cdot m_{CO_2} \cdot 250\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{8}{11}m_{CO_2} + m_{CO_2}} \\
&= \frac{\frac{330}{11} - \frac{4000}{11}}{\frac{19}{11}}\frac{\text{m}}{\text{s}} = -193.\,16\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.33 *Slobodnu kuglicu mase m_1, koja miruje pogodi kuglica mase $m_2 \neq m_1$ brzinom $v = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Poslije idealno elastičnog sudara kuglice se rasprše i to tako da druga kuglica promijeni svoj pravac gibanja za $90°$, a iznos brzinu joj se smanji za polovinu. Odredite pravac gibanja prve kuglice i brzinu poslije sudara.*

Rješenje:



Slika 4.24.

Postavimo ishodište koordinatnog sustava u točki položaja prve kuglice prije sudara, a os x postavimo tako da se druga kuglica prije sudara giba u pozitivnom smjeru osi x.

Pretpostavimo da se druga kuglica odbila u negativnom smjeru osi y. Neka se prva kuglica odbije pod kutom α u odnosu na pozitivni smjer osi x. Tada po zakonu očuvanja količine gibanja imamo

$$\begin{aligned} m_2\overrightarrow{v} &= m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2 \\ m_2 v\overrightarrow{i} &= m_1\left(v_{1x}\overrightarrow{i} + v_{1y}\overrightarrow{j}\right) - m_2 v_2\overrightarrow{j} \\ &= (m_1 v_{1x})\overrightarrow{i} + (m_1 v_{1y} - m_2 v_2)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Dva su vektora jednaka ako su im jednake komponente,

$$\begin{aligned} m_2 v &= m_1 v_{1x} \\ 0 &= m_1 v_{1y} - m_2 v_2 \end{aligned}$$

odakle uz

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_1 \cos\alpha \\ v_{1y} &= v_1 \sin\alpha \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} m_2 v &= m_1 v_1 \cos\alpha \\ m_2 v_2 &= m_1 v_1 \sin\alpha \end{aligned}$$

Zamjenom vrijednosti $v_2 = \frac{v}{2}$ i dijeljenjem jednadžbi slijedi

$$\begin{aligned} \frac{m_2 v}{m_2 v_2} &= \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{m_1 v_1 \sin\alpha} \\ \frac{v}{\frac{v}{2}} &= \cot\alpha \Longrightarrow \cot\alpha = 2 \\ \alpha &= \operatorname{arccot} 2 = 0.46365\,\mathrm{rad} = 26.56^\circ \end{aligned}$$

Obzirom da je sudar elastičan možemo iskoristiti zakon očuvanja mehaničke
energije na sudar

$$
\begin{aligned}
E^{(1)} &= E^{(2)} \\
\frac{1}{2}m_2v^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
m_2\left(v^2 - v_2^2\right) &= m_1v_1^2 \\
\frac{3}{4}m_2v^2 &= m_1v_1^2
\end{aligned}
$$

i uz izraz

$$m_2v = m_1v_1\cos\alpha \Longrightarrow m_1 = \frac{m_2v}{v_1\cos\alpha}$$

dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}m_2v^2 &= \frac{m_2v}{v_1\cos\alpha}v_1^2 = \frac{m_2v\cdot v_1}{\cos\alpha} \\
v_1 &= \frac{3}{4}v\cos\alpha = \frac{3}{4}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos 26.56^\circ = 6.71\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Primjer 4.3.34 *Sa površine Zemlje izbačeno je tijelo pod kutom α prema horizontu početnom brzinom v_0. Izrazite tangencijalnu i normalnu komponentu ubrzanja kao funkciju visine hica h, ako je maksimalna visina $h_{\max}$. Trenje zanemariti.*

Rješenje:

U svakoj točki putanje ukupno ubrzanje tijela jednako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$, jer na tijelo djeluje samo ubrzanje sile Zemljine teže. Tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja su

$$
\begin{aligned}
a_n &= g\cos\varphi \\
a_t &= g\sin\varphi
\end{aligned}
$$

gdje je kut φ, kut koji brzina zatvara sa horizontalom u promatranoj točki kosog hica na visini h.

Primjenjujući zakon očuvanja energije dobivamo (uz pretpostavku da je u početnoj točki izbacivanja tijela potencijalna energija jednaka nuli)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

odakle se dobiva

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v^2 + 2gh \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2gh} \end{aligned}$$

Tijekom gibanja horizontalna komponenta brzine ostaje konstantna i iznosi
$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, no, istovremeno vrijedi da je $v_x = v\cos\varphi = v_{0x} = v_0\cos\alpha$, odakle dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{v_0}{v}\cos\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\cos\alpha$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} a_n &= g\cos\varphi = \frac{g \cdot v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\cos\alpha \\ a_t &= g\sin\varphi = g\sqrt{1-\cos^2\varphi} = g\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2-2gh}}\cos\alpha\right)^2} \\ &= g\sqrt{1 - \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2 - 2gh}} = g\sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh - v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2 - 2gh}} \\ &= g\sqrt{\frac{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh}{v_0^2 - 2gh}} \end{aligned}$$

Početna brzina v_0 povezana je sa maksimalnom visinom preko relacije

$$h_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

pa je

$$\begin{aligned} a_n &= g\cos\alpha\sqrt{\frac{h_{\max}}{h_{\max} - h\sin^2\alpha}} \\ a_t &= g\sin\alpha\sqrt{\frac{h_{\max} - h}{h_{\max} - h\sin^2\alpha}} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.35 *Automobil mase* $1200\,\mathrm{kg}$ *i brzine* $54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *giba se prema raskrižju gdje se sudara sa dostavnim kamionom mase* $4000\,\mathrm{kg}$ *i brzine* $36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *koji nailazi u okomitom smjeru u odnosu na gibanje automobila. Nakon surada deformirana vozila se gibaju zajedno i zaustave se na udaljenosti od* $16\,\mathrm{m}$ *od položaja sudara. Odredite iznos i smjer brzine te ubrzanje koje imaju vozila nakon sudara uz pretpostavku da je gibanje jednoliko usporeno.*

Rješenje:
Iz zakona očuvanja količine gibanja slijedi

$$\begin{aligned} x &: \quad m_a v_a = (m_a + m_k)\, v \sin\alpha \\ y &: \quad -m_k v_k = (m_a + m_k)\,(-v)\cos\alpha \end{aligned}$$

dijeljenjem jednadžbi po x i y komponentama slijedi

$$\begin{aligned} \frac{m_a v_a}{-m_k v_k} &= \frac{(m_a + m_k)\, v \sin\alpha}{(m_a + m_k)\,(-v)\cos\alpha} = \tan\alpha \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{m_a v_a}{m_k v_k}\right) = \arctan\left(\frac{1200\,\mathrm{kg}\cdot 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4000\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{9}{20}\right) = 0.422\,85\,\mathrm{rad} = 24.23\,^\circ \end{aligned}$$

Iznos brzine se dobiva uvršavajući dobvenu vrijednost kuta u jednu od jednadžbi po komponentama (npr. x)

$$\begin{aligned} m_a v_a &= (m_a + m_k)\, v \sin\alpha \\ v &= \frac{m_a v_a}{(m_a + m_k)\sin\alpha} = \frac{1200\,\mathrm{kg}\cdot 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(1200\,\mathrm{kg} + 4000\,\mathrm{kg})\cdot \sin 24.23\,^\circ} \\ &= 8.\,44\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Ubrzanje automobila nakon sudara dobiva se iz uvjeta da je konačna brzina jednaka nuli (automobili su se zaustavili)

$$\begin{aligned} 0 &= v^2 + 2as \\ v^2 &= -2as \\ a &= -\frac{v^2}{2s} = -\frac{\left(8.\,44\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 16\,\mathrm{m}} = -2.\,23\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.36 *Mačka mase* 2 kg *skače brzinom* $10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *na ljuljačku mase* 5 kg*. Odredite visinu na koju će se mačka zaedno sa ljuljačkom popeti ako vektor brzine mačke i horizontalna ravnina zatvaraju kut od* $45\,^\circ$*.*

Rješenje:

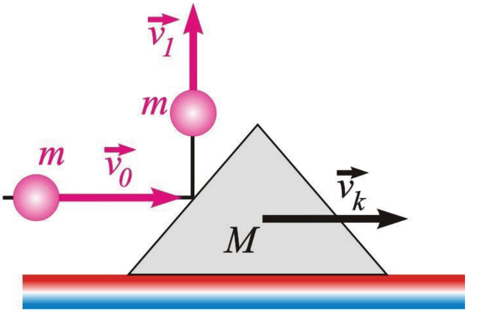
Koristeći zakon očuvanje količine gibanja za x komponentu slijedi

$$\begin{aligned} x &: \quad mv\cos\alpha = (m+M)\,v' \\ v' &= \frac{mv}{m+M}\cos\alpha = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\mathrm{kg}+5\,\mathrm{kg}}\cdot\cos 45\,^\circ = 2.02\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Iz zakona očuvanja energije dolazi se do visine koju će dosegnuti mačka zajedno sa ljuljačkom

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 &= (m+M)\,gh \\ h &= \frac{v'^2}{2g} = \frac{\left(2.02\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.208\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Primjer 4.3.37 *Pravokutni jednostrani klin (slika 4.25.) mase* $M =$ 10 kg *leži na horizontalnoj, potpuno glatkoj podlozi. Kuglica mase* $m =$ 10 g *giba se horizontalno i udari u kosu stranu klina i odskoči vertikalno u vis. Na koju će visinu odskočiti kuglica ako je sudar sa klinom bio savršeno elastičan i ako brzina klina poslije sudara iznosi* $v_k = 2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$*. Trenje zanemarite.*



Slika 4.25.

Rješenje:

Visina h koju će doseći kuglica ovisi o početnoj brzini odbijanja kuglice v_1 i iznosi

$$h = \frac{v_1^2}{2g}$$

Neka je upadna brzina kuglice v_0. Kako je brzina odbijanja kuglice od klina v_1 vertikalna, to će zakon održanja količine gibanja za horizontalnu komponentu dati

$$mv_0 = Mv_k \Longrightarrow v_0 = \frac{M}{m}v_k$$

Zakon očuvanja energije daje

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}Mv_k^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\
mv_0^2 &= Mv_k^2 + mv_1^2 \\
m\frac{M^2}{m^2}v_k^2 &= Mv_k^2 + mv_1^2 / : m \\
v_1^2 &= \frac{M}{m}\left(\frac{M}{m} - 1\right)v_k^2
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
h &= \frac{v_1^2}{2g} = \frac{M}{2gm} \cdot \left(\frac{M}{m} - 1\right) \cdot v_k^2 \\
&= \frac{10\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.01\,\mathrm{kg}} \cdot \left(\frac{10\,\mathrm{kg}}{0.01\,\mathrm{kg}} - 1\right) \cdot \left(0.02\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 20.37\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Primjer 4.3.38 *Drveni klin mase $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$ zabija se vertikalno u tlo uzastopnim udarcima čekića mase $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$. Sa koje visine H čekić slobodno pada na gornju stranu klina, ako klin ulazi u tlo pod svakim udarcem čekića za $h = 2\,\mathrm{cm}$, a srednja sila otpora koja se suprotstavlja prodiranju klina u tlo iznosi $F_{ot} = 2500\,\mathrm{N}$. Pretpostavimo da je sila otpora konstantna i da je sudar savršeno neelastičan.*

Rješenje:

Budući da je sudar savršeno neelastičan, čekić ne odskače od klina, tj. dalje se gibaju istom brzinom. Uslijed pada sa visine H čekić dobiva brzinu u trenutku udara u klin $v_1 = \sqrt{2gH}$. Klin ima početnu brzinu v_2 jednaku nuli. Neka u trenutku poslije sudara čekić i klin dobivaju brzinu v'. Primjenom zakona održanja količine gibanja imamo

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

odakle slijedi

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}{m_1 + m_2}$$

Pretpostavimo da je vrijeme sudara veoma kratko, te da prije početka prodiranja klina u tlo, klin i čekić dobivaju zajedničku brzinu v'. Pomoću zakona održanja mehaničke energije dobivamo

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot(v')^2+(m_1+m_2)\cdot g\cdot h=W_{ot}=F_{ot}\cdot h$$

gdje je $F_{ot}\cdot h$ rad sile otpora. Dakle,

$$F_{ot}\cdot h=\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{m_1^2\cdot 2gH}{(m_1+m_2)^2}+(m_1+m_2)\cdot g\cdot h$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{F_{ot}-(m_1+m_2)\cdot g}{m_1^2\cdot g}\cdot(m_1+m_2)\cdot h \\ &= \frac{2500\,\mathrm{N}-(10\,\mathrm{kg}+20\,\mathrm{kg})\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{(10\,\mathrm{kg})^2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\cdot(10\,\mathrm{kg}+20\,\mathrm{kg})\cdot 0.02\,\mathrm{m} \\ &\approx 1.35\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

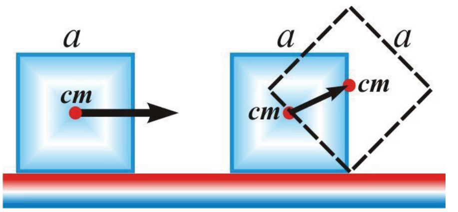
Primjer 4.3.39 *Homogeno tijelo oblika kocke (slika 4.26.) potrebno je pomicati po horizontalnoj ravnini. Odredite odnos izvršenih radova, ako tu kocku vučemo po podlozi ili je prevrćemo preko ruba. Ako je masa kocke* $m=50\,\mathrm{kg}$*, a koeficijent trenja između kocke i podloge* $\mu=0.4$ *izračunajte izvršeni rad na udaljenosti* $s=5\,\mathrm{m}$.

Rješenje:

Ako kocku povlačimo po podlozi tada se vrši rad na račun sile trenja između tijela i podloge. Rad koji se pri tome izvrši, da bi kocku pomakli za stranicu a jednak je

$$A_1=F_{tr}\cdot s=\mu mga$$

Pri prevrtanju kocke preko jednog njenog ruba trenje se može zanemariti, dok se rad vrši na račun podizanja težišta tijela, tj. povećanja njene potencijalne energije. Težište T pri jednom prevrtanju moramo podići za



Slika 4.26.

$$\begin{aligned} h &= \frac{d}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

gdje je $d-$ dijagonala kocke (za homogenu kocku težište se nalazi u sjecištu prostornih dijagonala). Pri prevrtanu izvršimo rad

$$A_2 = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

pa je odnos izvršenih radova pri povlačenju i prevrtanju kocke za duljinu a

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{2\mu}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{2 \cdot 0.4}{\sqrt{2} - 1} = 1.93 \end{aligned}$$

Izvršeni radovi se odnose na pomicanje kocke za stranicu a, tj. isto rastojanje. Ako se pomicanje na putu od $s = 5\,\mathrm{m}$ vrši vučenjem izvršeni rad jednak je

$$A_1' = \mu \cdot m \cdot g \cdot s = 0.4 \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m} = 981\,\mathrm{N}$$

dok se prevrtanjem izvrši rad

$$A_2' = \frac{A_1'}{1.93} = \frac{981\,\mathrm{N}}{1.93} = 507.92\,\mathrm{N}$$

Napomena: može postojati mala razlika u izvršenim radovima od onih izračunatih, ako ukupni prijeđeni put s nije višekratnik stranice kocke a, i tada može postojati drugačija ovisnost ovisno o veličini stranice a. U svakom slučaju je izvršeni rad prevrtanjem kocke manji u odnosu na izvršeni rad povlačenjem.

Primjer 4.3.40 *Tijekom pomicanja tijela po pravcu intezitet sile ovisi o putu i opisan je funkcijom* $F = \left(As^2 + Bs + C\right)\,\mathrm{N}$ *gdje je* $A = 2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, $B = 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ *i* $C = -15\,\mathrm{N}$ *i prijeđeni put* s *izražen u metrima. Izračunajte izvršeni rad ako je sila djelovala na udaljenosti od* $s_1 = 5\,\mathrm{m}$ *do* $s_2 = 8\,\mathrm{m}$.

Rješenje:

Izvršeni rad sile definiran je

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$$

Vektori sile i puta su kolinearni pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{s_1}^{s_2} F \cos 0 \; ds = \int_{s_1}^{s_2} F ds \\
&= \int_{5}^{8} \left(As^2 + Bs + C\right) ds \\
&= \left(\frac{As^3}{3} + \frac{Bs^2}{2} + Cs\right) |_5^8 \\
&= \left[\frac{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot (8\,\mathrm{m})^3}{3} + \frac{5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (8\,\mathrm{m})^2}{2} + 15\,\mathrm{N} \cdot 8\,\mathrm{m}\right] \\
&\quad - \left[\frac{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot (5\,\mathrm{m})^3}{3} + \frac{5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (5\,\mathrm{m})^2}{2} + 15\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m}\right] \\
&= 310.5\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

4.4 Zadatci

Problem 4.4.1 *Tijelo mase* $m = 2\,\mathrm{kg}$ *podiže se vertikalno naviše silom konstantnog inteziteta* F*, pri čemu do visine* $h = 1\,\mathrm{m}$ *izvrši rad* $W = 79.62\,\mathrm{J}$*. Koliko je ubrzanje tijela?*

Rezultat: $a = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Problem 4.4.2 *Dizalica podigne tijelo mase* $m = 4.5$ *t na visinu* $h = 8\,\mathrm{m}$*. Snaga dizalice je* $P = 8.832\,\mathrm{kW}$*. Za koje vrijeme dizalica podigne teret?*

Rezultat: $t = 5\,\mathrm{s}$.

Problem 4.4.3 *Izračunajte rad koji je potrebno izvršiti da bi se kamena kocka, mase* $m = 500\,\mathrm{kg}$*, brida* $a = 0.5\,\mathrm{m}$ *prevrnula oko jednog svog brida?*

Rezultat: $W = 5\,\mathrm{kJ}$.

Problem 4.4.4 *Da bi mogao uzletjeti zrakoplov mase* $m = 40$ *t na kraju piste treba imati brzinu* $v = 144\frac{\mathrm{km}}{h}$*. Ako je dužina piste* $s = 1\,\mathrm{km}$ *kolika je najmanja snaga motora potrebna za uzlijetanje zrakoplova? Gibanje zrakoplova smatrajte jednoliko ubrzanim, a koeficijent trenja između kotača zrakoplova i piste je* $\mu_k = 0.2$*.*

Rezultat: $P = 4.4192\,\mathrm{MW}$.

Problem 4.4.5 *Hidroelektrana ima branu visine* $h = 70\,\mathrm{m}$*, u čijem podnožju se nalazi hidroturbina iz koje izlazi voda brzinom* $v = 22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Koliki je stupanj korisnog djelovanja ovog hidrosustava?*

Rezultat: $\eta = 0.65$.

Problem 4.4.6 *Mehanički čekić mase* $m = 500\,\mathrm{kg}$ *udari u stub koji se pri tome zabije u tlo dubine* $d = 1\,\mathrm{cm}$*. Odredi silu kojom se tlo pri tome opire, ako pretpostavimo da je sila konstantna i ako je brzina čekića prije udarca iznosila* $v = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Masu stuba zanemarite.*

Rezultat: $F = 250\,\mathrm{N}$.

Problem 4.4.7 *Tijelo mase* $m = 30\,\mathrm{g}$ *bacimo sa mosta visokog* $h = 25\,\mathrm{m}$ *vertikalno naniže, brzinom* $v_0 = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Tijelo stigne na površinu vode brzinom* $v = 18\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Odredite rad koji je tijelo izvršilo svladavajući otpor zraka.*

Rezultat: $W = 6.91\,\mathrm{J}$.