Poglavlje 3

DINAMIKA

3.1 Osnovni pojmovi i definicije

Dinamika je postulirana s tri Newtonova zakona.

I. Newtonov zakon

Definicija 3.1.1 *Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja samo po sebi.*

Posljedica: To znači da bilo koje tijelo neće promijeniti ovo stanje samo po sebi. Za promjenu tog stanja mora postojati neki uzrok, na primjer djelovanje nekog drugog tijela, polja ili općenito neke vanjske sile.

Svojstvo tijela da održava navedeno stanje naziva se inercija ili tromost.

Definicija 3.1.2 *Masa* (m) *nekog tijela predstavlja mjeru tromosti odnosno inerciju tog tijela.*

Masa je osnovna fizikalna veličina (jedinica u SI sustavu je 1 kg) i za klasičnu mehaniku ona je za neko tijelo uvijek stalna ($m = const.$) bez obzira na proces u kojem navedeno tijelo sudjeluje.

Pojam masa nije povezan samo s dinamičkim stanjem tijela, nego i sa supstancijom uopće. To se može pokazati bliskom fizikalnom veličinom koju nazivamo gustoća tijela.

Gustoća homogenog tijela (ρ) predstavlja količnik njegove mase(m) i volumena (V)

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{3.1.1}$$

Ako je tijelo nehomogeno, onda jednadžbu (3.1.1) pišemo u diferencijalnom
obliku:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{3.1.2}$$

Fizikalna veličina koja opisuje tijelo u gibanju naziva se količina gibanja.

Definicija 3.1.3 *Količina gibanja materijalne točke predstavlja produkt njezine mase* (m) *i brzine* ($\overrightarrow{v}$) *kojom se ta materijalna točka giba:*

$$\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v} \tag{3.1.3}$$

Posljedica: Količina gibanja je vektorska veličina koja ima pravac i smjer vektora brzine materijalne točke.

Kao što smo vidjeli u klasičnoj mehanici masa nekog tijela je stalna, a prema I. Newtonovom zakonu tijelo koje se giba nekom stalnom brzinom $\overrightarrow{v}$ to stanje zadržava samo po sebi. To znači da se navedeni zakon može napisati u analitičkom obliku na slijedeći način:

$$m = const. \tag{3.1.4}$$

$$\overrightarrow{v} = const. \Longrightarrow \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = const. \tag{3.1.5}$$

Da bi došlo do promjene stanja, odnosno količine gibanja, opisanog u prvom zadatku moramo djelovati nekom silom ($\overrightarrow{F}$).

II. Newtonov zakon

Definicija 3.1.4 *Brzina promjene količine gibanja u vremenu proporcionalna je sili koja djeluje i zbiva se u smjeru i pravcu u kojem ta sila djeluje*

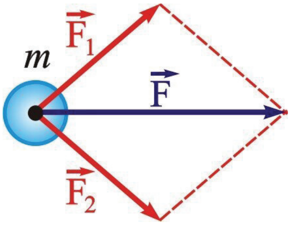
$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{3.1.6}$$

Posljedica: Koristeći relaciju (3.1.6) i definicije količine gibanja i ubrzanja imamo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = d\frac{(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.1.7}$$

i u nerelativističkom slučaju (gdje je $\frac{dm}{dt} = 0$) imamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1.8}$$



Slika 3.1.

Navedena relacija predstavlja također definiciju II. Newtonovog zakona. Ako na tijelo djeluju dvije ili više sila, onda važi princip superpozicije, tj. tijelo će se gibati po rezultantnoj sili ($\vec{F}$) koja predstavlja vektorski zbroj komponentnih vektora ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$). Na slici 3.1. imamo:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 = m\vec{a} \tag{3.1.9}$$

Odnosno za n-sila:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i \tag{3.1.10}$$

Svako djelovanje sile podrazumjeva i određeno vrijeme djelovanja te sile. Fizikalna veličina koja opisuje vremensko djelovanje sile nazivamo impuls sile ($\vec{I}$). Na osnovu II. Newtonovog zakona:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.1.11}$$

slijedi

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \tag{3.1.12}$$

Definicija 3.1.5 *Impuls sile je integral sile po vremenu.*

Na osnovu (3.1.12) vrijedi:

$$d\vec{I} = m\, d\vec{v} \tag{3.1.13}$$

$$\vec{I} = \int_{v_1}^{v_2} m\, d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \tag{3.1.14}$$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{3.1.15}$$

Iz relacije (3.1.15) vidimo da je impuls sile jednak razlici količine gibanja koja je nastala djelovanjem te sile.

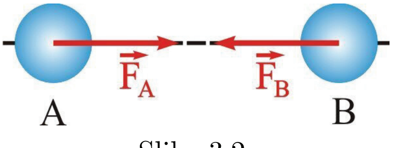
Napomena: Treba obratiti pozornost da količina gibanja i impuls sile imaju iste dimenzije, ali one su različite fizičke veličine.

III. Newtonov zakon

Ovaj zakon govori o prirodi sile kao interakcijske veličine. Ona se javlja uvijek u nekoj interakciji (međudjelovanju).

Definicija 3.1.6 *Svakom djelovanju postoji uvijek suprotno i jednako protudjelovanje. Odnosno djelovanje dvaju tijela jedno na drugo su jednakog inteziteta i suprotnog smjera.*

Ako djelovanje tijela A na tijelo B (slika 3.2.) označimo sa silom $\vec{F}_A$ (akcija), a djelovanje tijela B na A sa $\vec{F}_B$ (reakcija), onda analitički oblik III. Newtonovog zakona ima oblik



Slika 3.2.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \tag{3.1.16}$$

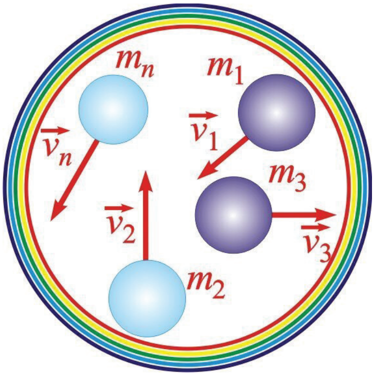
Posljedica: Akcija i reakcija djeluju uvijek na dva različita tijela; one ne mogu djelovati na isto tijelo.

Ustvari možemo reći da je III. Newtonov zakon posljedica zakona o održanju količine gibanja. Da bismo definirali zakon o održanju količine gibanja, moramo prvo definirati pojam mehanički izoliranog sustava.

Definicija 3.1.7 *Za neki sustav kažemo da je mehanički izoliran ako na njega djeluju vanjske sile ili je ukupno djelovanje vanjskih sila jednako nuli.*

U ovakvom sustavu možemo definirati zakon o održanju količine gibanja (slika 3.3.).

Definicija 3.1.8 *Ukupna količina gibanja u nekom mehanički izoliranom sustavu uvijek je stalna ili konstantna* $\overrightarrow{p} = const.$.



Slika 3.3.

Kao što se vidi na slici 3.3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2 + ... + m_n\overrightarrow{v}_n \\ &= \overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 + ... + \overrightarrow{p}_n = const.\end{aligned}$$

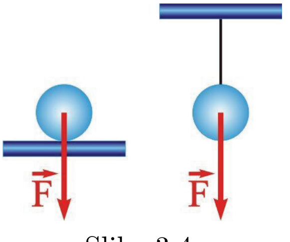
$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v}_i = const. \tag{3.1.17}$$

Napomena: Unutar zatvorenog sustava svako pojedinačno tijelo može promijeniti svoju količinu gibanja, ali na račun drugih tijela unutar sustava, tako da je ukupna količina gibanja sustava uvijek ista.

Neke karakteristične sile:

1. **Težina tijela**

Definicija 3.1.9 *Težina tijela je sila kojom tijelo djeluje na horizontalnu podlogu ili na objesište u slučaju da je obješeno (slika 3.4.).*



Slika 3.4.

Ovaj pojam sile se povezuje najčešće sa poljem sile zemljine teže. U gravitacijskom polju težina tijela na mirnoj horizontalnoj podlozi ima oblik:

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{3.1.18}$$

gdje je $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ i $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$ - akceleracija sile teže

$$\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{g} \tag{3.1.19}$$

Ova jednadžba ima primjenu i ako se tijelo i podloga gibaju nekom stalnom brzinom ($\overrightarrow{v} = const.$). No, ako se tijelo ili podloga gibaju nekim ubrzanjem ($\overrightarrow{a}$) onda težina tijela ima oblik:

$$\overrightarrow{F} = m\left(\overrightarrow{g} \pm \overrightarrow{a}\right) \tag{3.1.20}$$

Napomena: Pretpostavka je da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{g}$ kolinearni, a predznaci su određeni odnosom ova dva vektora.

2. **Centripetalna (radijalna) sila**

Već smo rekli da kod bilo kog krivocrtnog gibanja imamo pojavu centripetalnog ubrzanja, a prema II. Newtonovom zakonu tom ubrzanju odgovara centripetalna sila. Imamo:

$$\overrightarrow{a}_{cp} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{r}_0 = -\omega^2 r\ \overrightarrow{r}_0 \tag{3.1.21}$$

iz definicije sile $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ slijedi:

$$\overrightarrow{F}_{cp} = m\overrightarrow{a}_{cp} = -m\frac{v^2}{r}\overrightarrow{r}_0 = -m\omega^2 r\ \overrightarrow{r}_0 \tag{3.1.22}$$

Napomena: Predznak minus pojavljuje se zbog toga što je vektor položaja ($\overrightarrow{r}$) uvijek orijentiran od centra do promatrane točke, a centripetalna sila $\left(\overrightarrow{F}_{cp}\right)$ ka centru.

3. **Sila trenja**

Definicija 3.1.10 *Prilikom gibanja jednog tijela po drugom (relativno gibanje) javlja se sila trenja* $\left(\overrightarrow{F}_{tr}\right)$ *koja se opire tom gibanju.*

Posljedica: Sila trenja djeluje uvijek retrogradno na gibanje jednog tijela na drugo. S obzirom na oblik gibanja sila trenja se dijeli na:

a) sila trenja mirovanja (statička sila trenja),

b) sila trenja klizanja,

c) sila trenja kotrljanja.

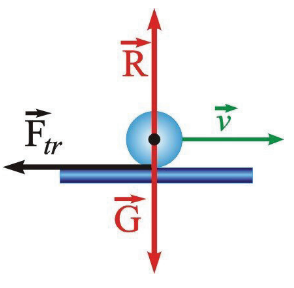
a) Sila trenja mirovanja ima svoje porijeklo u mehaničkim karakteristikama dodirnih površina i uvijek je jednaka aktivnoj sili, ali je suprotnog smjera.

$$\overrightarrow{F}_a = -\overrightarrow{F}_{tr} \Leftrightarrow \overrightarrow{F}_a + \overrightarrow{F}_{tr} = 0 \tag{3.1.23}$$

Vidimo iz jednadžbe (3.1.23) da se te dvije sile uvijek potiru pa se tijelo nalazi u stanju mirovanja, odnosno sila trenja mirovanja se opire pokretanju tijela.

b) Dok je sila trenja mirovanja promjenjiva i jednaka aktivnoj sili, sila trenja klizanja ima uvijek točno određenu vrijednost. Analitički oblik joj glasi:

$$F_{tr} = \mu \cdot R \tag{3.1.24}$$



Slika 3.5.

Sila trenja klizanja ovisi od normalne sile reakcije podloge $\left(\overrightarrow{R}\right)$ i koeficijenta trenja (μ) koji je određen vrstom dodirne površine (slika 3.5.). U slučaju da je podloga vodoravna vrijedi:

$$R = G = mg \Rightarrow F_{tr} = \mu R = \mu mg \tag{3.1.25}$$

c) Sila trenja kotrljanja javlja se prilikom rotacije tijela po podlozi i ona ima mnogo manju vrijednost od sile trenja klizanja za isto tijelo u istim uvjetima.

3.2 Problemski zadaci

Problem 3.2.1 *Astronaut pomoću određene vage na Mjesecu izmjeri masu uzorka Mjesečevog tla. Izmjerena masa iznosi* $m = 423\,\mathrm{g}$. *Kolika je masa ovog uzorka na Zemlji?*

Odgovor:

Masa tijela je jedno od osnovnih svojstava i ne ovisi o položaju tijela, tako da je masa uzorka na Zemlji također $m = 423\,\mathrm{g}$.

Problem 3.2.2 *Ako se vrši tlačenje dređene količine plina mijenja li se pri tom procesu masa plina?*

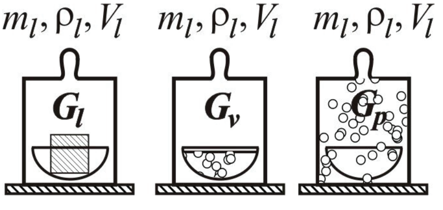
Odgovor:

Masa plina ostaje nepromijenjena.

Problem 3.2.3 *Pod staklenim zvonom nalazi se posuda sa kockom leda (slika 3.6.) koja poslije zagrijavanja prelazi u tekuće stanje, a zatim u plinovito. Kako se odnose mase, volumeni, gustoće i težine supstance u sva tri agregatna stanja?*

Odgovor:

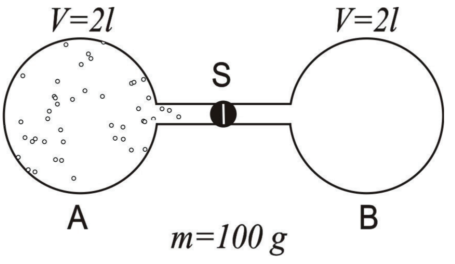
Masa supstance se neće mijenjati zbog promjene agegatnog stanja pa time ni njihova težina, dok se volumeni i gustoće mijenjaju. Kako led ima manju gustoću od vode, to će volumen leda biti veći od volumena vode. Plin (vodena para) ima najmanju gustoću i najveći volumen koji je jednak volumenu staklenog zvona.



Slika 3.6.

$$m_L = m_V = m_p,\ G_V = G_L = G_p,\ V_p > V_L > V_V \Longrightarrow \rho_V > \rho_L > \rho_p$$

Problem 3.2.4 *Na slici 3.7. su prikazane dvije posude A i B, jednakih volumena. U posudi A nalazi se količina plina čija je masa* $m = 100\,\mathrm{g}$, *dok je u posudi B vakuum. Kada se otvori ventil S, jedan dio plina iz posude A prelazi u posudu B. Kolika je gustoća plina u posudi A prije i poslije otvaranja ventila S? Kolika je gustoća plina u posudi B poslije otvaranja ventila?*



Slika 3.7.

Odgovor:

Gustoća plina u posudi A prije otvaranja ventila iznosi

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.1\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 50\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

dok nakon otvaranja ventila gustoća plina u posudama iznosi

$$\rho' = \frac{m}{2 \cdot V} = 25\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

U posudu će B nakon otvaranja ventila ulaziti plin iz posude A sve dok se tlakovi u te dvije posude ne izjednače pa tlak u posudi B iznosi jednako kao i u posudi A tj.

$$\rho_B = 25\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Problem 3.2.5 *Pod inercijom podrazumijevamo opće svojstvo tijela da se odupire promjeni stanja jednoliko pravocrtnog gibanja ili mirovanja. Koje od slijedećih iskaza možemo uzeti kao ekvivalentne zadanoj definiciji (Napomena: zanemarujemo procese koji se mogu događati unutar tijela):*

1. *tijelo se ne može samo od sebe pokrenuti,*
2. *tijelo se ne može samo od sebe zaustaviti,*
3. *tijelo ne može samo od sebe promjeniti svoje apsolutno gibanje ili mirovanje.*

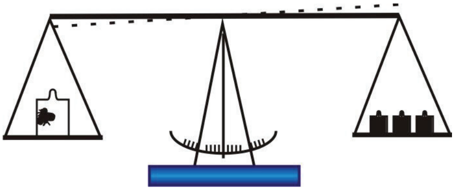
Odgovor:

Budući da je gibanje određeno u odnosu na referentni sustav, treći iskaz bi bio ekvivalentan zadanoj definiciji inercije. Dakle, tijelo ne može samo od sebe promjeniti svoje apsolutno gibanje ili mirovanje.

Problem 3.2.6 *Precizna vaga je uravnotežena. Na jednom kraju vage se nalazi stakleno zvono sa muhom (vidi sliku 3.8.). Uravnoteženje vage je vršeno u trenutku kada je muha mirovala na stijenci staklenog zvona. Što će se dogoditi s ravnotežom vage kada muha poleti (Napomena: masa zvona nije mnogo veća od mase muhe).*

Odgovor:

Ravnoteža će se poremetiti. Iako masa na oba kraja vage ostaje konstantna, težina na lijevoj strani vage je manja u trenutku polijetanja muhe.



Slika 3.8.

Problem 3.2.7 *Prema II. Newtonovu zakonu mehanike ubrzanje koje tijelo dobiva djelovanjem sile ovisi o:*

1. *njegovom položaju u prostoru,*
2. *brzini koje tijelo ima u tom trenutku,*
3. *masi tijela,*
4. *kemijskom procesu unutar tijela.*

Odgovor:

3. masi tijela.

Problem 3.2.8 *Sustav se giba ravnomjerno pravocrtno ako:*

1. se sustav nalazi samo pod djelovanjem vanjskih sila,
2. u sustavu djeluju samo unutrašnje sile,
3. sustav je pod djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila.

Odgovor:
2. Ako u sustavu djeluju samo unutrašnje sile.

Problem 3.2.9 *Koja gibanja definiraju sljedeće relacije:*

a) $\overrightarrow{F} = const.$, $\overrightarrow{F} > 0$,

b) $\overrightarrow{F} = const.$, $\overrightarrow{F} < 0$,

c) $\overrightarrow{F} = 0$,

d) $\overrightarrow{F} \neq const.$.

Odgovor:

a) Kako je $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$, to slijedi $\overrightarrow{F} = const. \Longrightarrow \overrightarrow{a} = const.$ i $\overrightarrow{a} > 0$ što definira jednoliko ubrzano gibanje.

b) $\overrightarrow{a} = const.$ i $\overrightarrow{a} < 0$ - jednoliko usporeno gibanje.

c) $\overrightarrow{a} = 0$ - jednoliko pravocrtno gibanje, jer je $\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_1$.

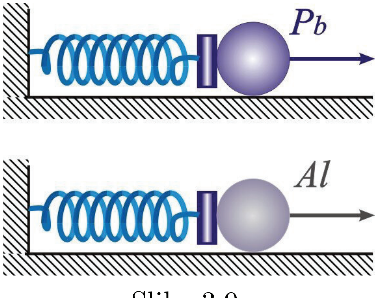
d) $\overrightarrow{a} \neq const.$ - nejednoliko promjenjivo gibanje.

Problem 3.2.10 *Je li moguće da tijekom gibanja tijela pod djelovanjem neke sile imamo $\overrightarrow{F} = const.$ i $\overrightarrow{v} = 0$? Objasniti odgovor.*

Odgovor:

Moguće je pod uvjetom da je $\overrightarrow{v} = 0$ trenutna brzina. U tom slučaju imamo jednoliko usporeno gibanje gdje je navedena brzina konačna brzina, da bi se tijelo nakon toga gibalo jednoliko ubrzano s promjenom smjera gibanja.

Problem 3.2.11 *Dvije jednake čelične opruge sabijene su pod djelovanjem sile $\overrightarrow{F}$ za istu dužinu. Postave li se ispred opruge kuglice jednakog volumena, jedna od olova, a druga od aluminija, a zatim opruge puste, koja će kuglica dobiti veće ubrzanje (slika 3.9.)? Zanemarite trenje i otpor zraka.*



Slika 3.9.

Odgovor:

Sila koja bude djelovala na obje kugle bit će istog inteziteta, tako da je:

$$\overrightarrow{F} = m_{Pb} \cdot \overrightarrow{a}_{Pb} = m_{Al} \cdot \overrightarrow{a}_{Al}$$

gdje su $m_{Pb}, \overrightarrow{a}_{Pb}-$ masa i ubrzanje olovne kuglice i $m_{Al}, \overrightarrow{a}_{Al}-$ masa i ubrzanje aluminijske kuglice. Budući da su volumeni kugla jednaki $V_{Pb} = V_{Al}$, a gustoća olova je veća od gustoće aluminija $\rho_{Pb} > \rho_{Al}$, po definiciji gustoća imamo

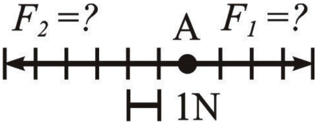
$$\begin{aligned} \rho_{Pb} &= \frac{m_{Pb}}{V_{Pb}}; \ \rho_{Al} = \frac{m_{Al}}{V_{Al}} \\ \rho_{Pb} &> \rho_{Al} \Longrightarrow m_{Pb} > m_{Al} \end{aligned}$$

Masa olovne kuglice je veća od mase aluminijske kuglice pa mora biti $\overrightarrow{a}_{Al} > \overrightarrow{a}_{Pb}$.

Problem 3.2.12 *Na tijelo djeluju sile $\overrightarrow{F}_1$ i $\overrightarrow{F}_2$ čije su karakteristike zadane na slici 3.10.. U kojem smjeru će se gibati tijelo A? Koliki intezitet bi trebala imati sila $\overrightarrow{F}_1$ da bi tijelo bilo u ravnoteži? Koliki je intezitet sile pod čijim djelovanjem se giba tijelo A?*

Odgovor:

Na osnovu slike vrijednosti sila su: $F_1 = 4\,\mathrm{N}$, $F_2 = 6\,\mathrm{N}$ Budući da su vektori kolinearni i suprotni vrijedi:



Slika 3.10.

1. Tijelo će se gibati po pravcu na kojem leže vektori $\overrightarrow{F}_1$ i $\overrightarrow{F}_2$,

2. U slučaju da je $F_1 = F_2$ tijelo će biti u ravnoteži,

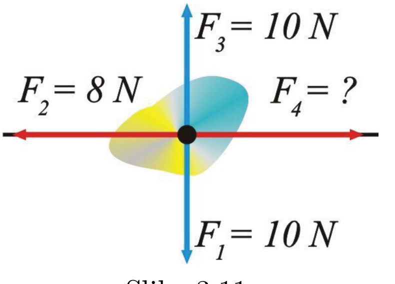
3. Intezitet rezultantne sile je

$$R = F_2 - F_1 = 6\,\mathrm{N} - 4\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$$

Problem 3.2.13 *Na tijelo djeluju četiri sile. Ako se tijelo nalazi u ravnoteži odredite intezitet sile $\overrightarrow{F}_4$ (slika 3.11.).*

Odgovor:

Da bi tijelo bilo u ravnoteži, mora ukupna sila biti jednaka nuli. Kao što se može vidjeti sile $\overrightarrow{F}_1$ i $\overrightarrow{F}_3$ imaju isti intezitet, ali suprotan smjer pa se one u svom djelovanju poništavaju.



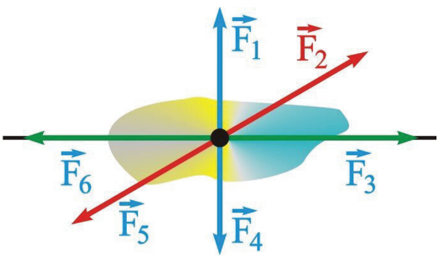
Slika 3.11.

$$\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_3 = 0\,\mathrm{N}$$

Dakle, sila $\overrightarrow{F}_4$ treba poništavati djelovanje sile $\overrightarrow{F}_2$ pa je inteziteti ove dvije sile jednaki, odnosno

$$F_4 = 8\,\mathrm{N}$$

Problem 3.2.14 *Šest sila jednakih inteziteta imaju zajedničku napadnu točku. Kakav pravac i smjer trebaju imati ove sile da bi tijelo bilo u ravnoteži. Prikažite grafički.*



Slika 3.12.

Odgovor:

Prema uvjetima zadatka sve sile imaju isti intezitet. Kako bi se moglo poništiti djelovanje jedne sile ona mora imati silu koja je jednakog inteziteta kao i razmatrana sila i njoj suprotnog smjera. To znači, svaka sila mora imati sebi suprotnu silu. Iz slike se zaključuje da sile moraju zadovoljavati uvjete:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 \\ \overrightarrow{F}_1 &= -\overrightarrow{F}_4,\ \overrightarrow{F}_2 = -\overrightarrow{F}_5,\ \overrightarrow{F}_3 = -\overrightarrow{F}_6 \end{aligned}$$

Problem 3.2.15 *Trgovac je kupio zlato u Kairu, a prodavao ga u Stockholmu. Pod pretpostavkom da je zlato prodavao po istoj cijeni kao što je i kupio, u kojem slučaju je trgovac zaradio ako je zlato mjerio: dinamometrom ili vagom?*

Odgovor:

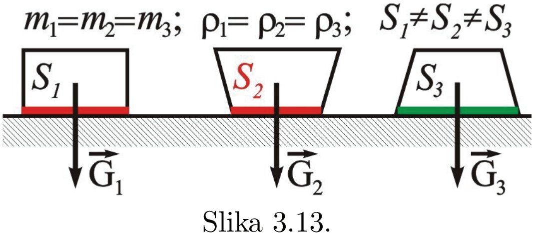
Masa kupljenog zlata je svugdje jednaka, dok je njegova težina u Stockholmu veća, što znači da je trgovac zaradio mjereći težinu zlata dinamometrom.

Problem 3.2.16 *Posuda napunjena vodom izvlači se iz dubokog bunara ravnomjerno. Je li jednaka sila zatezanja užeta kada je posuda na dnu bunara ili kada se ona nalazi na njegovom otvoru iznad razine vode?*

Odgovor:

Jest.

Problem 3.2.17 *Tijela istih masa i gustoća nalaze se na horizontalnoj podlozi (slika 3.13.). Kako se odnose težine tijela?*



Slika 3.13.

Odgovor:

Budući da tijela imaju jednake mase to je i težina sva tri tijela je jednaka $G_1 = G_2 = G_3$ jer ona ne ovisi o obliku tijela niti o veličini dodirne površine.

Problem 3.2.18 *Mogu li tijela različitih masa imati jednaku težinu? Objasnite odgovor.*

Odgovor:

Tijela različitih masa mogu imati istu težinu, jer težina tijela ne ovisi samo o sili teže, nego i od dinamičkog stanja sustava, tako da možemo izabrati takva ubrzanja sustava da težine tijela budu jednake.

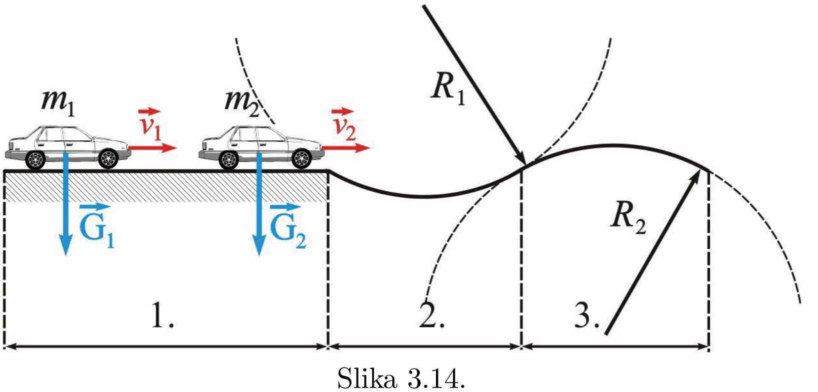
Problem 3.2.19 *Tri tijela istih masa $m_1 = m_2 = m_3$ nalaze se na horizontalnim podlogama i to tako da se prva podloga giba konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}_1$ vertikalno naniže, druga podloga konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}_2$ vertikalno uvis i treća podloga konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}_3$ vertikalno uvis i to tako da vrijedi $\overrightarrow{v}_3 > \overrightarrow{v}_2$. Kako se odnose težine ta tri tijela?*

Odgovor:

Budući da je ubrzanje sustava jednako nuli ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$) u sva tri slučaja, to je i težina tijela jednaka ($G_1 = G_2 = G_3$).

Problem 3.2.20 *Na putu koji je zadan na slici 3.14. gibaju se dva automobila brzinama $\overrightarrow{v}_1$ i $\overrightarrow{v}_2$, pri čemu je brzina prvog automobila veća od brzine drugog ($\overrightarrow{v}_1 > \overrightarrow{v}_2$). Pretpostavimo li da je masa oba automobila jednaka ($m_1 = m_2$), hoće li težine automobila biti jednaka u svim točkama putanje?*

Odgovor:



Slika 3.14.

Na prvom dijelu puta težine automobila su jednake ($G_1 = G_2$). Na drugom i trećem dijelu puta težine će biti različite zbog djelovanja centrifugalne sile. Na drugom dijelu puta centrifugalna sila je u smjeru težine tijela pa vrijedi

$$\begin{aligned} v_1 &> v_2 \Longrightarrow (F_{cf})_1 = \frac{mv_1^2}{R_1} > (F_{cf})_2 = \frac{mv_2^2}{R_1} \\ (G_1)_{II} &= G_1 + (F_{cf})_1 > (G_2)_{II} = G_2 + (F_{cf})_2 \end{aligned}$$

odnosno, težina prvog tijela je veća od težine drugog tijela.

Na trećem dijelu puta smjer centrifugalne sile je suprotan smjeru djelovanja težine tijela pa je:

$$\begin{aligned} v_1 &> v_2 \Longrightarrow (F_{cf})_1 > (F_{cf})_2 \\ (G_1)_{III} &= G_1 - (F_{cf})_1 < (G_2)_{III} = G_2 - (F_{cf})_2 \end{aligned}$$

težina prvog automobila manja od težine drugog automobila.

Problem 3.2.21 *Pretpostavimo da ste dobili za zadatak konstruirati svemirsku stanicu koja bi se stalno nalazila u orbiti oko Zemlje. Postavljen je uvjet da orbitalna stanica omogućuje normalan život i rad astronauta, tj. da astronauti imaju težinu. Kako biste riješili problem bestežinskog stanja?*

Odgovor:

Svemirska stanica bi mogla imati oblik torusa i rotirati pa bi bilo $F_{cf} = G$.

Problem 3.2.22 *U prethodnom zadatku 3.6 s vagom i muhom vidjeli smo da se u slučaju polijetanja muhe u posudi ravnoteža poremeti. Poznato nam je da vaga mjeri masu, a ne težinu tijela. Objasnite kako je moguće da je vaga registrirala polijetanje muhe iako je muha ostala u sustavu koji je mjeren, tj. masa mjernog sustava je ostala nepromijenjena.*

Odgovor:

Ravnoteža na krakovima vage uspostavljena je preko jednakosti težina:

$$G_1 = G_2$$

gdje je $G_1 = (m_p + m_m) \cdot g$ i $G_2 = m_t \cdot g$. Korištene oznake su: m_t- masa tijela, m_p- masa posude i m_m- masa muhe. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}(m_p + m_m) \cdot g &= m_t \cdot g \\ m_p + m_m &= m_t\end{aligned}$$

Kada muha poleti, ona više ne djeluje na podlogu pa je težina na lijevom kraku vage $G'_1 = m_p \cdot g$ odnosno

$$G'_1 < G_1 = G_2$$

što znači da dolazi do poremećaja ravnoteže sustava iako je masa ostala ista.

Problem 3.2.23 *Na koji način bi astronaut u svemirskom brodu, dok se nalazi u bestežinskom stanju, mogao pomoću vage izmjeriti masu nekog tijela?*

Odgovor:

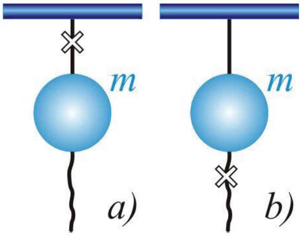
Ovakve vage s tasovima trebale bi biti opremljene hvataljkama za utege i tijela, da bi oni dobro nalijegali na tasove. Kada se krakovi povuku ubrzanjem a, na tegove mase m_1 djelovat će interakcijska sila $(m_1 a)$, a na tijelo mase m_2 interakcijska sila $(m_2 a)$. Ako ove sile nisu jednake, krakovi vage će imati izvjestan otklon, tj. neće biti u ravnoteži. Prema veličini i smjeru otklona treba izvršiti korekciju mase i tegova i postupak ponavljati sve dok se pri ubrzanom gibanju krakovi vage ne nađu u ravnoteži.

Problem 3.2.24 *U svemirskom brodu, koji se nalazi u bestežinskom stanju, nalaze se dvije metalne kugle jednakog promjera i obojena istom bojom tako da se ne razlikuju. Jedna je sačinjena od aluminija, a druga od olova. Kako astronaut može zaključiti koja kugla je od olova?*

Odgovor:

Može na više načina, a najjednostavniji način je da rukom uhvatimo najprije jednu kuglu, pomičemo je lijevo desno pa da to isto uradimo sa drugom kuglom. Kugla veće mase ima veću inerciju pa ju je teže pomaknuti.

Problem 3.2.25 *Na slici 3.15. je prikazana željezna kugla koja visi o debljem koncu. Ako se slobodni kraj konca povlači polako, prekinut će se konac iznad kugle (slika 3.15.a), a ako se povuče naglo, prekinut će se ispod kugle (slika 3.15.b). Objasni ovu pojavu.*



Slika 3.15.

Odgovor:

Ova pojava je posljedica prenošenja sile (interakcije) duž konca, tako da pri kratkotrajnom djelovanju sile, interakcija se ne prenosi preko tijela, nego konac puca ispod tijela.

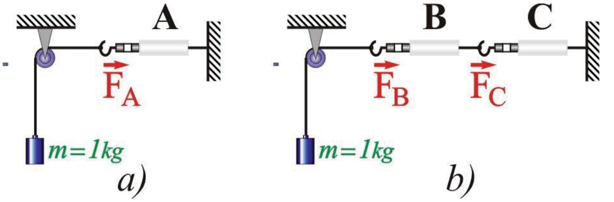
Prilikom dugotrajnog djelovanja sile, interakcija se prenosi preko kugle na gornji dio konca, koji dodatno zateže i težina željezne kugle (dolazi do zbrajanja težine tijela i sile kojom vučemo konac) pa je napetost konca iznad kugle veća te će konac puknuti iznad željezne kugle.

Problem 3.2.26 *Astronauti su na Mjesečevoj površini uzeli uzorke tla (npr. kamenja) i u laboratoriju koji se nalazi na mjesečevu modulu odredili fizičke karakteristike tla. Poslije povratka na Zemlju ovi su uzorci ponovno ispitivani. Koje od slijedećih fizičkih veličina moraju korigirati: masa, težina, gustoća ili specifična težina.*

Odgovor:

Težina i specifična težina.

Problem 3.2.27 *Tijelo mase* $m = 1\,\mathrm{kg}$ *obješeno je preko koloture na dva načina prikazana na slici 3.16.. Koliku silu* F_A *treba pokazati dinamometar A u slučaju a)? Kolike sile* F_A *i* F_B *trebaju pokazati dinamometri B i C u slučaju b)?*



Slika 3.16.

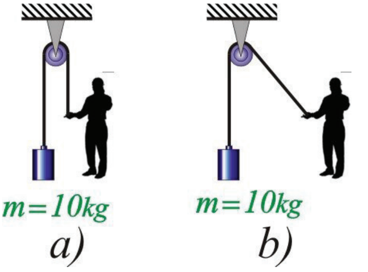
Odgovor:

U oba slučaja dinamometar će pokazivati silu inteziteta $F = 9.81\,\mathrm{N}$, ako se nalazi na mjestu gdje jakost gravitacijskog polja iznosi $\gamma = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. U slučaju b) dinamometri B i C će prikazivati istu silu zatezanja zbog toga što se sila zatezanja dinamometra B prenosi preko sile napetosti niti na dinamometar C (i to istog inteziteta).

Problem 3.2.28 *Radnik podiže posudu maltera čija je masa* $m = 10\,\mathrm{kg}$*, pomoću koloture kao što je prikazano na slici 3.17.. Kolikom najmanjom silom radnik treba povlačiti uže u prvom, a kolikom u drugom slučaju?*

Odgovor:

Oba radnika trebaju povlačiti uže silama jednakog inteziteta F, koja je jednaka težini posude s malterom mg, jer se sila jednakog inteziteta prenosi preko koloture i napetosti užeta kojim se povlači tijelo u različitim smjerovima: u slučaju a) vertikalno naniže, a u slučaju b) pod određenim kutom.



Slika 3.17.

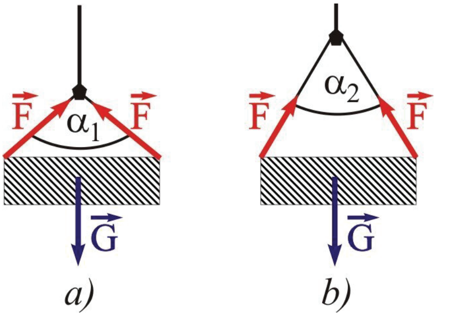
Dakle, najmanja sila iznosi

$$F = mg = 10\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 98.1\,\mathrm{N}$$

Problem 3.2.29 *Na slici 3.18. je prikazan težak sanduk koji se podiže pomoću lanca (ili užeta). U kojem slučaju a) ili b) lanac trpi jaču silu?*

Odgovor:

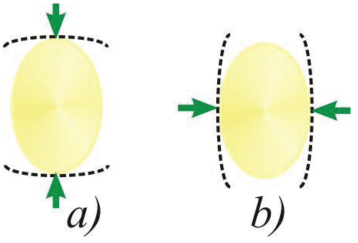
Vertikalne se komponente sile zatezanja lanca trebaju suprotstaviti težini tijela. Kako je kut α_1 u slučaju a) veći od kuta α_2 u slučaju b) to su vertikalne komponente sile zatezanja lanca manje (vertikalne komponente sile zatezanja su proporcionalne sa kosinusom kuta $\frac{\alpha_1}{2}$ odnosno $\frac{\alpha_2}{2}$, ako kut raste, vrijednost kosinusa kuta opada $0 < \alpha < 90$). Da bi komponente ostale iste, moramo u slučaju a) povećati intezizet sila zatezanja lanca. Na osnovu ovih razmatranja sila slijedi da lanac trpi jaču silu u slučaju a).



Slika 3.18.

Problem 3.2.30 *Iz iskustva je poznato da je jaje lakše zdrobiti rukama ako se na njega djeluje sa strane (bočno), a teže ako se djeluje uzduž (preko vrhova). Objasnite.*

Odgovor:



Slika 3.19.

U slučaju da se na jaje djeluje preko vrhova (slika 3.19.a) kut između komponenti sila koje djeluju na površinu jajeta je mali (iznosi približno 0) pa su sile djelovanja na površinu jajeta male (približno vanjeskim silama). Ako se na jaje djeluje sa strane (slika 3.19.b) kut između komponenti sila koje djeluju na površinu jajeta je približno 180° pa su komponente na koje se razlažu sile djelovanja ogromne, odnosno trebamo djelovati manjim silama tako da se jaje lakše zdrobi.

Problem 3.2.31 *Prije ulaska u svemirski brod izmjerena je masa astronauta koja iznosi $m = 92\,\mathrm{kg}$. Kolika je masa astronauta u svemirskom brodu smještenom na površini Mjeseca. Mijenja li se masa astronauta kad on izađe iz svemirskog broda i kolika bi mu bila masa kada bi on ostao u modulu koji kruži oko Mjeseca?*

Odgovor:

Masa astronauta na površini Mjeseca također iznosi $m = 92\,\mathrm{kg}$. Masa se ne mijenja u ovisnosti o položaju tijela.

Problem 3.2.32 *Zbog čega je lakše izvući list papira iz vrha pakiranja, nego li iz njegovog dna? Kada je ova sila manja: kada pakovanje leži širom stranom na horizontalnoj podlozi ili kada leži na manjoj strani ("postavljen na kant")?*

Odgovor:

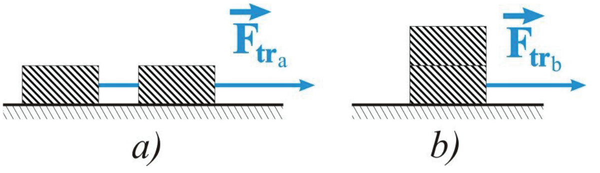
Zbog toga što je potrebno svladati jaču silu trenja kada se izvlači list papira iz dna pakiranja. Naime, intezitet normalne sile na podlogu jednaka je težini cijelog pakiranja kada se izvlači posljednji list (kada pakiranje leži širom stranom na horizontalnoj podlozi). Kada je pakiranje postavljeno na bočnu stranu (kant), onda na svaki list djeluje sila trenja koja potiče od sile pritiska omota pakiranja.

Problem 3.2.33 *Na horizontalnoj podlozi nalaze se dva tijela istih masa (slika 3.20.), ali različitih koeficijenata trenja ($\mu_1 > \mu_2$). Kako će se odnositi sile trenja u slučajevima pod a i b?*

Odgovor:

U drugom slučaju je sila trenja veća jer je:

za slučaj a):



Slika 3.20.

$$\begin{aligned} F_{tr_a} &= F_{tr_1} + F_{tr_2} \\ &= \mu_1 mg + \mu_2 mg \\ &= (\mu_1 + \mu_2)\, mg \end{aligned}$$

a za slučaj b):

$$F_{tr_b} = 2\mu_1 mg$$

jer je

$$\mu_1 > \mu_2 \Longrightarrow 2\mu_1 mg > (\mu_1 + \mu_2)\, mg$$

ili

$$F_{tr_b} > F_{tr_a}$$

Problem 3.2.34 *Na staklenoj horizontalnoj površini nalaze se dvije kocke istih masa. Jedna kocka je od drveta, a druga od stakla, čije su strane idealno uglačane. Silu trenja klizanja drvene kocke po staklu možemo zanemariti dok silu trenja staklene kocke ne možemo zanemariti. Objasnite ovu pojavu.*

Odgovor:

Sila trenja stakla po staklu je daleko veća zbog toga što se između stakla i stakla javljaju jake molekularne sile koje povećavaju koeficijent trenja, odnosno silu trenja.

Problem 3.2.35 *Kakvo kinematičko stanje tijela definiraju slijedeće relacije:*

$$a)\ F_{tr} > F \quad b)\ F_{tr} = F \quad c)\ F_{tr} < F$$

gdje su: F - aktivna sila koja povlači tijelo i F_{tr} - sila trenja.

Odgovor:

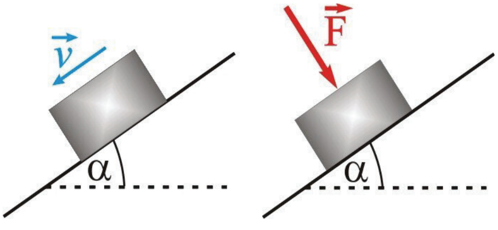
a) mirovanje,

b) mirovanje ili jednoliko pravocrtno gibanje,

c) jednoliko ubrzano gibanje.

Problem 3.2.36 *Tijelo klizi niz strmu ravan (slika 3.21.). Tijelo se može zaustaviti na kosini djelovanjem normalne sile F na podlogu određenim intezitetom. Objasnite ovu činjenicu.*

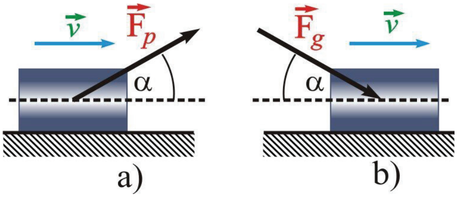
Odgovor:



Slika 3.21.

Djelovanjem sile F čiji je pravac okomit na podlogu, povećava se ukupna normalna sila N na podlogu pa se na taj način pomoću ove sile može po volji povećavati sila trenja koja se suprotstavlja klizanju tijela i u određenom trenutku je ona dovoljno velikog inteziteta da poništi tangencijalnu komponentu težine tijela pa će tijelo stati.

Problem 3.2.37 *Na slici 3.22.a) prikazano je jedno tijelo koje se pomiče povlačenjem, a na slici 3.22.b) isto tijelo koje se pomiče guranjem. Vučna sila F_v i potisna sila F_p zatvaraju isti kut α u odnosu na horizontalnu ravninu. Na osnovu poznatog o sili trenja, odgovorite u kojem slučaju je sila trenja veća, tj. je li "lakše" tijelo gurati ili povlačiti?*



Slika 3.22.

Odgovor:

U slučaju a) vertikalna komponenta sile F_p djeluje vertikalno naviše i time smanjuje normalnu komponentu djelovanja tijela na podlogu, odnosno i silu trenja. U slučaju b) vertikalna komponenta potisne sile F_g djeluje vertikalno naniže i time povećava normalnu silu na podlogu, a time i silu trenja. Dakle, tijelo je lakše povlačiti nego li gurati.

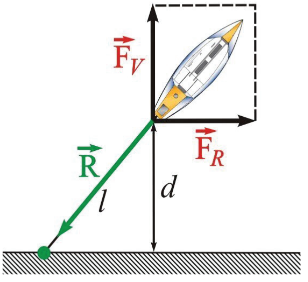
Problem 3.2.38 *Je li moguće da se tijelo kreće u odnosu na promatrača, pri čemu su tijelo i promatrač u nekom otpornom sredstvu (npr. u zraku), a da tijelo ne osjeća otpor sredstva (zraka)?*

Odgovor:

Moguće je, ako se zrak i tijelo gibaju istom brzinom, odnosno ako je relativna brzina tijela u odnosu na zrak jednaka nuli.

3.3 Primjeri

Primjer 3.3.1 *Na čamac koji je privezan uz obalu rijeke užetom duljine 5 m djeluju tok rijeke silom od 800 N i vjetar koji puše u smjeru okomitom na obalu silom 600 N. Kolika je napetost užeta i na kojoj se udaljenosti od obale nalazi dio čamca za koji je privezan?*



Slika 3.23.

Rješenje:
Iz slike 3.23. se uočava da vrijedi

$$\vec{R} = \vec{F}_R + \vec{F}_V$$

Kako su vektori $\vec{F}_R$ i $\vec{F}_V$ okomiti vrijedi

$$R = \sqrt{F_R^2 + F_V^2} = \sqrt{(800\,\mathrm{N})^2 + (600\,\mathrm{N})^2} = 1\,\mathrm{kN}$$

Napetost niti T mora biti jednaka ukupnoj sili koja djeluje na čamac, zbog toga što čamac miruje, ukupna sila koja djeluje na čamac jednaka je 0.

$$T = R = 1\,\mathrm{kN}$$

Vidimo da vrijedi i proporcija

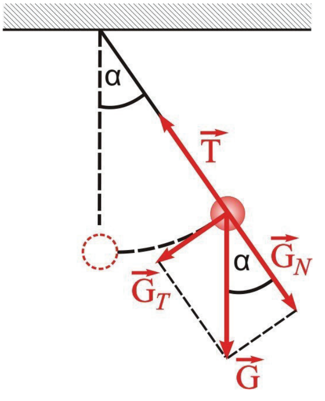
$$\frac{l}{d} = \frac{R}{F_V} \Longrightarrow d = \frac{l \cdot F_V}{R} = \frac{5\,\mathrm{m} \cdot 600\,\mathrm{N}}{1000\,\mathrm{N}} = 3\,\mathrm{m}$$

Primjer 3.3.2 *Kugla mase* 2 kg *obješena je o nerastegljivu nit i otklonjena iz položaja ravnoteže za kut* $\alpha = 30°$. *Koliko iznosi sila napetosti niti i kolika je sila koja nastoji vratiti kuglu u položaj ravnoteže?*

Rješenje:
Težinu G rastavljamo na komponente po smjeru niti (normalna komponenta) G_N i na tangencijalni smjer gibanja tijela niti (tangencijalna komponenta) G_T. Kako u pravcu niti nemamo gibanja ukupna sila mora biti jednaka 0, tj. napetost niti mora biti jednaka normalnoj komponenti težine.

Iz slike 3.24. se može vidjeti veza između normalne komponente težine i napetosti niti. Iznos napetosti niti poništava djelovanje normalne komponente težine i upravo je po iznosu jednak toj normalnoj komponenti težine

$$\begin{aligned} T &= G_N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha \\ T &= 2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 30 \approx 17\,\mathrm{N} \end{aligned}$$



Slika 3.24.

Komponenta sile koja ubrzava tijelo i nastoji ga vratiti u ravnotežni položaj je tangencijalna komponenta težine

$$\begin{aligned} F &= G_T = G\sin\alpha = mg\sin\alpha \\ F &= 2\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 30 = 9.81\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.3 *Predmet mase* 100 kg *obješen je u spojnici dva potporna štapa A i B koji su učvršćeni u zid (slika 3.25.). Ako štapovi međusobno čine kut od $\alpha = 60°$, izračunajte kolikom silom F_1 teret isteže štap A, odnosno silom F_2 pritišće štap B.*

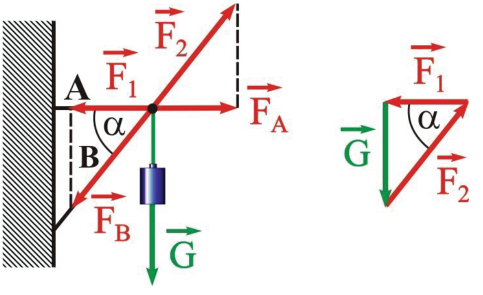
Rješenje:

Iz slika 3.25. nacrtajmo poligon sila. Iz poligina sila se zaključuje da je komponenta težine u smjeru štapa B jednak

$$F_2 = \frac{G}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin 60} \approx 1132\,\mathrm{N},$$

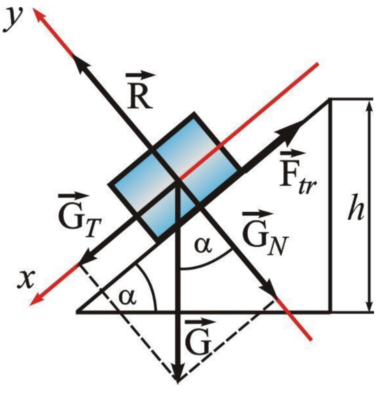
a u smjeru štapa A

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2\cos\alpha = \frac{G}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \\ &= G\cot\alpha = mg\cot 60 \approx 566\,\mathrm{N} \end{aligned}$$



Slika 3.25.

Primjer 3.3.4 *Koliko se dugo spušta tijelo niz kosinu visine* $h = 4\,\mathrm{m}$ *i nagiba $\alpha = 45°$ ako je maksimalni kut pri kojem tijelo može mirovati na kosini $\beta = 35°$. Pretpostavite da je kinetički faktor trenja za* 15% *manji od statičkog.*



Slika 3.26.

Rješenje:

Postavimo li koordinatni sustav tako da jedna koordinata (recimo x) bude paralelna ravnini kosine i usmjerena niz kosinu, a druga (y) njoj okomita i usmjerena prema kosini.

II. Newtonov zakon će za tijelo koje miruje pri maksimalnom kutu β dati statički koeficijent trenja (slika 3.26.).

$$\begin{aligned}\sum_i F_{x_i} &= G_T - F_{tr} = G_T - \mu_s R = 0 \\ \sum_i F_{y_i} &= G_N - R = 0 \Rightarrow R = G_N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_T &= mg\sin\beta \\ G_N &= mg\cos\beta\end{aligned}$$

gdje su G_N - normalna komponenta, G_T - tangencijalna komponenta težine, a R - reakcija podloge.

$$mg\sin\beta - \mu_s mg\cos\beta = 0$$

odnosno

$$\mu_s = \tan\beta = \tan 35^\circ = 0.7 \tag{3.3.1}$$

Izraz (3.3.1) je općeniti izraz za računanje statičkog koeficijenta trenja. Kinetički koeficijent je 15% manji od statičkog pa imamo

$$\mu_k = 0.85 \cdot \tan\beta = 0.5951$$

Ubrzanje tijela niz kosinu nagiba α je prema II. Newtonovu zakonu

$$\sum_i F_{x_i} = G_T - F_{tr} = G_T - \mu_k G_N = ma$$

$$\begin{aligned}ma &= mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha \\ a &= g\,(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)\end{aligned}$$

Tijelo se spušta niz kosinu čija je duljina jednaka

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Sada koristimo izraz za prijeđeni put pri jednoliko ubrzanom gibanju, bez početne brzine

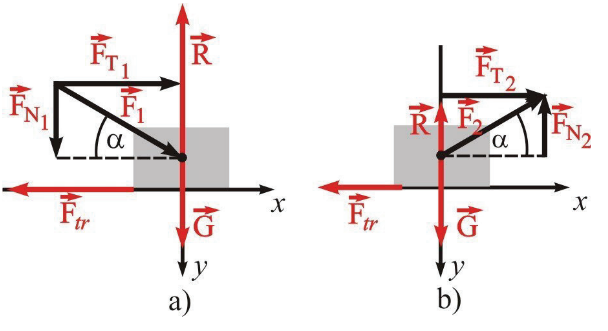
$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha\left[g\left(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha\right)\right]}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{\sin 45\left[9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\sin 45 - 0.5951\cos 45\right)\right]}} = 1.4192\,\mathrm{s}$$

Primjer 3.3.5 *Tijelo oblika kvadra i mase $m = 50\,\mathrm{kg}$ treba pomicati po horizontalnoj ravnini konstantnom brzinom. Pomicanje se može vršiti guranjem ili vučenjem tijela. Sile F_1 i F_2 sa horizontalnom ravninom zatvaraju isti kut $\alpha = 30°$. Kolike su jačine sila F_1 i F_2 ako je koeficijent trenja između tijela i podloge $\mu = 0.35$?*

Rješenje:

Razmotrimo prvo pomicanje tijela guranjem (slika 3.27.a). Silu F_1 možemo rastaviti na normalnu F_1^N (komponenta sile okomita na podlogu) i tangencijalnu komponentu F_1^T paralelnu sa horizontalnom ravninom.



Slika 3.27.

Ukupna sila u okomitom smjeru na podlogu mora biti jednaka nuli pa vrijedi jednadžba

$$\sum_i F_{N_i} = F_{N_1} + mg - R = 0$$

odakle je reakcija podloge

$$R = F_{N_1} + mg$$

Da bi tijelo pomicali konstantnom brzinom, mora ukupna tangencijalna sila iščezavati

$$\begin{aligned}\sum_i F_{T_i} &= F_{T_1} - F_{tr} = 0 \\ F_{T_1} &= F_{tr} = \mu R = \mu\left(F_{N_1} + mg\right)\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}F_{N_1} &= F_1 \sin\alpha \\ F_{T_1} &= F_1 \cos\alpha\end{aligned}$$

pa imamo

$$F_1 \cos\alpha = \mu\left(F_1 \sin\alpha + mg\right) = \mu F_1 \sin\alpha + \mu mg$$

$$F_1 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{0.35 \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 30 - 0.35 \cdot \sin 30} = 248.\,44\,\mathrm{N}$$

Ako tijelo povlačimo silom F_2 (slika 3.27.b) tada je reakcija podloge jednaka

$$\sum_i F_{N_i} = mg - F_{N_2} - R = 0 \Longrightarrow R = mg - F_{N_2}$$

dok ukupna tangencijalna sila mora biti jednaka nuli

$$\begin{aligned}\sum_i F_{T_i} &= F_{T_2} - F_{tr} = 0 \\ F_{T_2} &= F_{tr} = \mu R = \mu\left(mg - F_{N_2}\right)\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}F_{N_2} &= F_2 \sin\alpha \\ F_{T_2} &= F_2 \cos a\end{aligned}$$

sila F_2 iznosi

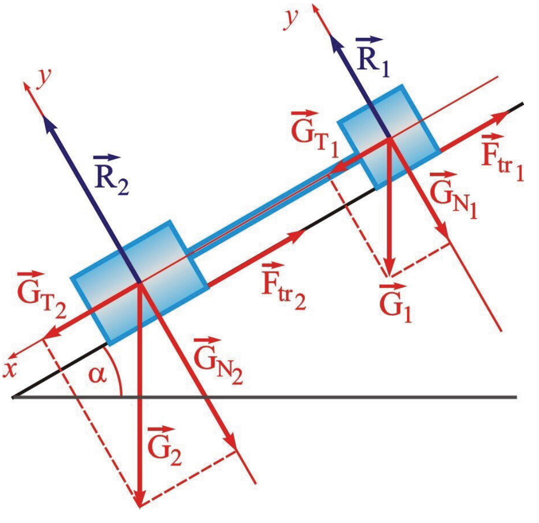
$$F_2 \cos\alpha = \mu\left(mg - F_2 \sin\alpha\right) = \mu mg - \mu F_2 \sin\alpha$$

$$F_2 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{0.35 \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 30 + 0.35 \cdot \sin 30} = 164.\,91\,\mathrm{N}$$

Kao što vidimo, trebamo upotrijebiti manju silu kad tijelo povlačimo po podlozi, nego kad ga guramo.

Primjer 3.3.6 *Koliko ubrzanje a ima sustav dva kruto vezana tijela, masa*
$m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$, koja klize niz kosinu nagib $\alpha = 30°$? Koeficijenti trenja između tijela i kosine iznose $\mu_1 = 0.15$ i $\mu_2 = 0.35$.

Rješenje:



Slika 3.28.

Ukupna sila koja djeluje na tijela u smjeru $x-$ osi (slika 3.28.) po II. Newtonovu zakonu daje

$$\sum_i F_{x_i} = G_{T_1} + G_{T_2} - F_{tr_1} - F_{tr_2} = (m_1 + m_2) \cdot a$$

odnosno

$$\begin{aligned} a &= \frac{G_{T_1} + G_{T_2} - F_{tr_1} - F_{tr_2}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 + m_2)\, g \sin\alpha - g\,(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) \cos\alpha}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

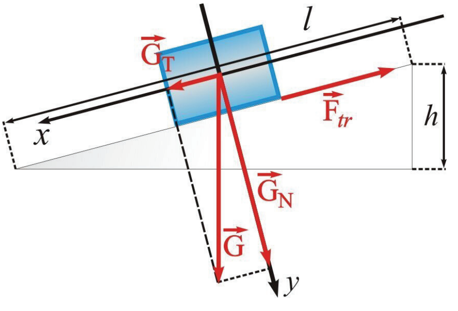
$$\begin{aligned} a &= \left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right) g \\ &= \left(\sin 30 - \frac{0.15\cdot 3\,\mathrm{kg} + 0.35\cdot 5\,\mathrm{kg}}{3\,\mathrm{kg} + 5\,\mathrm{kg}}\cos 30\right)\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 2.57\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.7 *S vrha kosine visoke $h = 2.5\,\mathrm{m}$ i duljine $l = 10\,\mathrm{m}$ klizi tijelo mase $m = 2\,\mathrm{kg}$. Odredite koeficijent trenja klizanja, ako je brzina koju tijelo postiže pri dnu kosine $v = 2.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.*

Rješenje:

Primjenom II. Newtonova zakona za ubrzanje na kosini (slika 3.29.) dobivamo

$$\sum_i F_{x_i} = G_T - F_{tr} = G_T - \mu_k G_N = ma$$



Slika 3.29.

Koristeći izraze za tangencijalnu i normalnu komponentu težine dobivamo

$$\begin{aligned} G_T &= mg\sin\alpha;\ G_N = mg\cos\alpha \\ ma &= mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha \\ a &= g\left(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha\right) \end{aligned}$$

gdje je

$$\sin\alpha = \frac{h}{l};\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

Prijeđeni put niz kosinu pri jednoliko ubrzanom gibanju bez početne brzine jednak je

$$s = l = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2g\left(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha\right)}$$

rješavanjem jednadžbe po μ_k

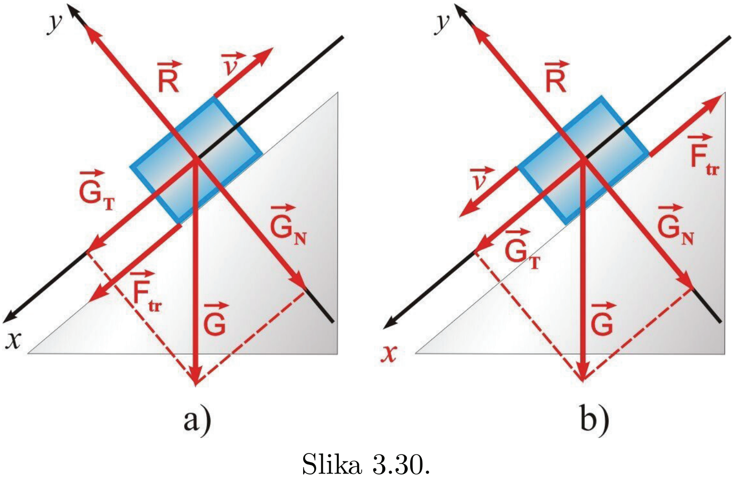
$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2gl} &= \sin\alpha - \mu_k\cos\alpha \\ \mu_k\cos\alpha &= \sin\alpha - \frac{v^2}{2gl} \end{aligned}$$

dobivamo traženi koeficijent

$$\begin{aligned}\mu_k &= \frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{v^2}{2gl}\right)\\ &= \frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}\left(\frac{h}{l} - \frac{v^2}{2gl}\right)\\ &= \frac{2gh - v^2}{2g\sqrt{l^2-h^2}} = \frac{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2.5\,\mathrm{m} - \left(2.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\sqrt{(10\,\mathrm{m})^2 - (2.5\,\mathrm{m})^2}} = 0.22\end{aligned}$$

Primjer 3.3.8 *Kojom brzinom će se vratiti tijelo koje je gurnuto uz kosinu nagiba $\alpha = 40^\circ$ početnom brzinom $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ako je koeficijent trenja $\mu = 0.3$. Koliko bi morao iznositi koeficijent trenja μ da bi se tijelo vratilo tri puta manjom brzinom od početne?*

Rješenje:



Slika 3.30.

Gibanje uz kosinu (slika 3.30.a) je jednoliko usporeno u x-smjeru, a u y-smjeru nema ubrzanja tijela. II. Newtonov zakon za to gibanje daje

$$\begin{aligned}\sum_i F_{x,i} &= G_T - F_{tr} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_1\\ \sum_i F_{y,i} &= R - mg\cos\alpha = 0\end{aligned}$$

$$F_{tr} = \mu R = \mu mg\cos\alpha$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_i F_{x,i} &= -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_1\\ a_1 &= -g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

gdje je a_1 ubrzanje (usporenje) uz kosinu. Tijelo će se zaustaviti nakon vremena t_1 koje dobijemo iz uvjeta da je brzina tijela jednaka nuli.

$$v = v_0 + a_1 t_1 = 0 \Longrightarrow t_1 = -\frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$$

prijeđeni put uz kosinu je tada

$$\begin{aligned}s_1 &= v_0 t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = v_0\left(-\frac{v_0}{a_1}\right) + \frac{1}{2}a_1\left(-\frac{v_0}{a_1}\right)^2\\ s_1 &= -\frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}\end{aligned}$$

Tijelo će se vratiti niz kosinu (slika 3.30.b) jednoliko ubrzanim gibanjem opisano jednadžbom

$$\begin{aligned}ma_2 &= G_T - F_{tr} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha\\ a_2 &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

prijeđeni put $s_2 = s_1$ pa konačnu brzinu dobivamo pomoću izraza

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{2a_2 s_2} = \sqrt{2a_2 s_1} = \sqrt{2g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\frac{v_0^2}{2g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}}\\ v &= v_0\sqrt{\frac{\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{\sin 40 - 0,3\cdot\cos 40}{\sin 40 + 0,3\cdot\cos 40}} \approx 13.76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Da bi se tijelo vratilo tri puta manjom brzinom mora vrijediti $\frac{v}{v_0} = \frac{1}{3}$ pa za koeficijent trenja dobivamo

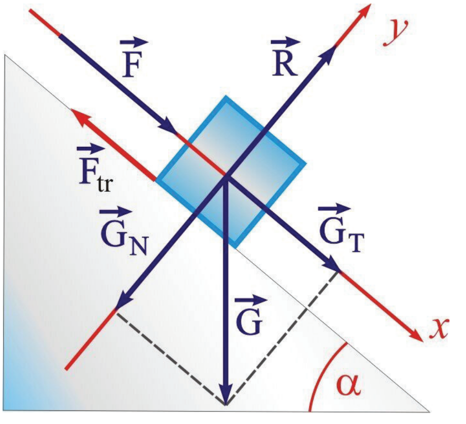
$$\begin{aligned}\frac{v}{v_0} &= \sqrt{\frac{\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}} = \frac{1}{3}\\ \frac{1}{9} &= \frac{\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)} \Longrightarrow 8\sin\alpha = 10\mu\cos\alpha\\ \mu &= \frac{4}{5}\tan\alpha = \frac{4}{5}\tan 40 \approx 0.6712\end{aligned}$$

Primjer 3.3.9 *Tijelo mase* $m = 5\,\mathrm{kg}$ *klizi niz kosinu duljine* $l = 10\,\mathrm{m}$ *i nagiba* $\alpha = 30°$. *Ako na tijelo djeluje sila* $F = 10\,\mathrm{N}$ *paralelno niz kosinu, kolika će biti brzina tijela pri dnu kosine? Koliko bi iznosila ta brzina ako promijenimo smjer sile* F *uz kosinu? Koeficijent trenja između tijela i kosine iznosi* $\mu_k = 0.2$.

Rješenje:

Tijelo nema ubrzanja u y - smjeru jer se giba paralelno uz kosinu, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_i F_{y_i} &= G_N - R = 0 \\ R &= G_N \end{aligned}$$



Slika 3.31.

Kada sila djeluje niz kosinu II. Newtonov zakon daje

$$\begin{aligned} \sum_i F_{x_i} &= G_T + F - F_{tr} \\ &= G_T + F - \mu_k R = ma \end{aligned}$$

$$ma = mg\cos\alpha + F - \mu_k mg\sin\alpha$$

$$a = g\left(\cos\alpha - \mu_k \sin\alpha\right) + \frac{F}{m} = 9.5147\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

pa je brzina jednaka

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2al} = \sqrt{2 \cdot 9.5147\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}} = 13.795\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kada sila ima smjer uz kosinu, II. Newtonov zakon daje

$$\sum_i F_{x_i} = G_T - F - F_{tr} = G_T - F - \mu_k R = ma$$

$$a = g\left(\cos\alpha - \mu_k \sin\alpha\right) - \frac{F}{m} = 5.5147\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

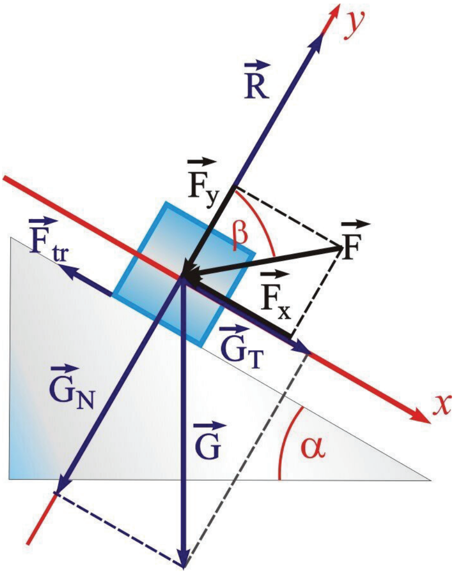
pa je brzina

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2 \cdot 5.5147\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}} = 10.502\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uočimo da u jednadžbama za ubrzanja samo sila F mijenja predznak.

Primjer 3.3.10 *Tijelo mase* $m = 50\,\mathrm{kg}$ *klizi niz kosinu nagiba* $\alpha = 40°$. *Ako na tijelo djeluje sila* $F = 50\,\mathrm{N}$ *koja zatvara kut* $\beta = 50°$ *s* y *- osi (slika 3.32.), koliko će biti ubrzanje tijela? Koliki bi morao biti iznos sile* F *da tijelo jednoliko klizi niz kosinu? Koeficijent trenja između tijela i kosine iznosi* $\mu_k = 0.3$.

Rješenje:



Slika 3.32.

Da bismo razmotrili gibanje, trebamo projicirati silu F na pojedine osi koordinatnog sustava. Primjer možemo poopćiti i na N - sila, gdje bi projekciju izvršili za svaku pojedinu silu. Sada II. Newtonov zakon daje

$$\sum_i F_{y_i} = G_N + F_y - R = 0$$

$$\begin{aligned} R &= G_N + F_y \\ &= mg\cos\alpha + F\cos\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i F_{x_i} &= G_T - F_{tr} - F_x \\ &= G_T - \mu_k R - F_x \\ &= ma \end{aligned}$$

Odavdje se za vrijednost ubrzanja uz korištenje izraza za tangencijalnu komponentu težine $G_T = mg\sin\alpha$ i $x-$ komponentu sile $F_x = F\sin\beta$ dobiva

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - \mu_k\left(mg\cos\alpha + F\cos\beta\right) - F\sin\beta \\ a &= g\left(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha\right) - \frac{F}{m}\left(\sin\beta + \mu_k\cos\beta\right) = 3.09\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Da bi tijelo jednoliko klizilo niz kosinu, ubrzanje mora biti jednako nuli.

$$\begin{aligned} a &= g\left(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha\right) - \frac{F}{m}\left(\sin\beta + \mu_k\cos\beta\right) = 0 \\ F &= mg\frac{\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha}{\sin\beta + \mu_k\cos\beta} = 211.25\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.11 *Kutiju pijeska vučemo pomoću užeta čija napetost ne smije biti veća od* $T = 1100\,\mathrm{N}$. *Koeficijent statičkog trenja iznosi* $\mu_s = 0.35$. *Koliko treba iznositi kut između užeta i tla da bi povukli najveću moguću masu pijeska? Koliko iznosi ta masa?*

Rješenje:

Jednadžba gibanja tijela koje vučemo po horizontalnoj podlozi je- Promatrano po komponentama x i y dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_i F_{i_x} &= F\cos\alpha - F_{tr} = ma && (3.3.2)\\
\sum_i F_{i_y} &= F\sin\alpha + F_N - mg = ma_y = 0 \\
F_N &= mg - F\sin\alpha && (3.3.3)\\
F_{tr} &= \mu_s F_N = \mu_s\left(mg - F\sin\alpha\right) && (3.3.4)\\
&= \mu_s mg - \mu_s F\sin\alpha && (3.3.5)
\end{aligned}$$

Obzirom da je zadan statički koeficijent trenja, ubrzanju u x smjeru je također jednaku nuli, pa iz jednadžbe za $x-$ koordinatu i jednadžbe za silu trenja slijedi

$$\begin{aligned}
F\cos\alpha - F_{tr} &= 0\\
F\cos\alpha &= F_{tr} = \mu_s mg - \mu_s F\sin\alpha\\
F\cos\alpha + \mu_s F\sin\alpha &= F_{tr} = \mu_s mg\\
F &= \frac{\mu_s mg}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Ovo je funkcija sile koja ovisi o kutu α a je njena derivacija

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\alpha} &= \frac{-\mu_s mg}{(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha)^2}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha\right)\\
&= \frac{-\mu_s mg}{(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha)^2}\cdot\left(-\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

Uvjet maksimalne vrijedosti napetosti niti daje

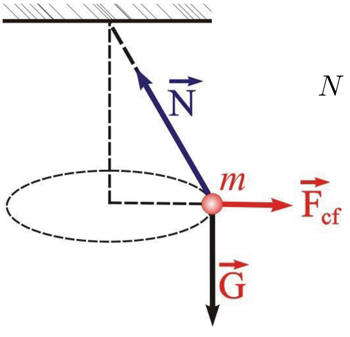
$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\alpha} &= 0 \Longrightarrow -\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha = 0\\
\mu_s &= \tan\alpha\\
\alpha &= \arctan\mu_s = \arctan 0.35 = 0.337\,\mathrm{rad} = 19.31\,^\circ
\end{aligned}$$

Masa je pri tome

$$\begin{aligned} m &= \frac{F\left(\cos\alpha+\mu_s\sin\alpha\right)}{\mu_s g}=\frac{1100\,\mathrm{N}\left(\cos 0.337+0.35\cdot\sin 0.337\right)}{0.35\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\ &= 339.43\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.12 *Kuglica mase* $m = 1\,\mathrm{g}$ *obješena je o nit duljine* $l = 1\,\mathrm{m}$ *giba se jednoliko po kružnici tako da nit zatvara kut* $\varphi = 30°$ *s vertikalom. Odredite period kruženja i napetost niti tog stožastog njihala.*

Rješenje:



Slika 3.33.

Na kuglicu djeluje sila teža $\overrightarrow{G}$ i napetost niti $\overrightarrow{N}$. Napetost niti je

$$N = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{mg}{\cos 30} = 0.01328\,\mathrm{N} = 13.28\,\mathrm{mN}$$

Sila teža $\overrightarrow{G}$ i napetost niti $\overrightarrow{N}$ vektorski zbrojene daju centripetalnu silu.

$$\begin{aligned} F_{cp} &= mg\tan\varphi = \frac{mv^2}{r} \\ v &= \sqrt{g\cdot r\cdot\tan\varphi} \\ &= \sqrt{g\cdot l\sin\varphi\cdot\tan\varphi} \end{aligned}$$

odakle je period kruženja

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi\cdot l\sin\varphi}{\sqrt{g\cdot l\sin\varphi\cdot\tan\varphi}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\varphi}{g}} = 1.87\,\mathrm{s}$$

Primjer 3.3.13 *Dječak mase* $30\,\mathrm{kg}$ *i djevojčica mase* $23\,\mathrm{kg}$ *spuštaju se zajedno na jednim saonicama mase* $5\,\mathrm{kg}$ *niz brežuljak nagiba* $\alpha = 30\,°$. *Nacrtajte dijagram sila za ovaj sustav i izračunajte koliki je koeficijent dinamičkog opterećenja ako se saonice spuštaju stalnom brzinom, odnosno kada se saonice spuštaju ubrzavajući stalnom akcelercijom* $a = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*?*

Rješenje:

Kada se saonice spuštaju stalnom brzinom $v = konst.$ njihovo ubrzanje jednako je nuli $a = 0$, odakle slijede jednadžbe gibanja

$$\begin{aligned} x &: \; 0 = mg\sin\alpha - F_{tr} \\ y &: \; 0 = F_N - mg\cos\alpha \end{aligned}$$

odavdje je

$$\begin{aligned} F_{tr} &= mg\sin\alpha \\ F_N &= mg\cos\alpha \\ F_{tr} &= \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha \\ \mu &= \tan\alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \end{aligned}$$

Kada se saonice spuštaju konstantnim ubrzanjem jednadžbe su

$$\begin{aligned} x &: ma = mg\sin\alpha - F_{tr} \Longrightarrow F_{tr} = mg\sin\alpha - ma \\ y &: 0 = F_N - mg\cos\alpha \Longrightarrow F_N = mg\cos\alpha \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} F_{tr} &= \mu F_N = \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha - ma \\ \mu &= \frac{mg\sin\alpha - ma}{mg\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha} \\ &= \tan 30^\circ - \frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 30^\circ} = 0.46 \end{aligned}$$

Primjer 3.3.14 *Dva utega, od kojih se prvo mase* $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ *nalazi na kosini nagiba* $\alpha = 60^\circ$ *i drugo mase* $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ *koje visi o niti, povezana su koloturom zanemarive mase. Koliko bi morao iznositi koeficijent trenja koji dozvoljava jednoliko gibanje ovakvog sustava te provedite fizikalnu analizu rezultata. Kolika bi bila napetost niti* T *te ubrzanje sustava za vrijednost koeficijenta trenja* $\mu = 0.4$*?*

Rješenje:

Kako je $m_2 > m_1$ pretpostavimo da je pozitivni smjer gibanja u smjeru padanja tijela mase m_2. II. Newtonov zakon za pojedina tijela glasi:

Tijelo mase m_1 :

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - G_{1_T} - F_{tr} \\ m_1 a &= T - m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha \end{aligned}$$

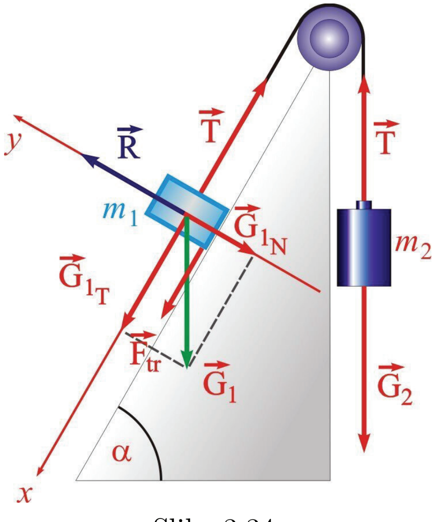
a tijelo mase m_2 :

$$m_2\cdot a = G_2 - T = m_2\cdot g - T$$

Zbrajanjem prethodnih jednadžbi dolazimo do izraza

$$\begin{aligned} m_1 \cdot a + m_2 \cdot a &= m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \sin\alpha - \mu \cdot m_1 \cdot g \cos\alpha g \\ (m_1 + m_2) \cdot a &= (m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu \cdot m_1 \cos\alpha) \cdot g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(m_2 - m_1 \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m_1 \cdot \cos\alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \\ a &= \frac{m_2 - m_1 \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \end{aligned}$$



Slika 3.34.

Ako se utezi gibaju jednoliko mora vrijediti $a = 0$ pa imamo

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 - m_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) \\ m_2 &= m_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) \\ \mu &= \frac{m_2}{m_1 \cos\alpha} - \tan\alpha \\ &= \frac{5\ kg}{2\ kg \cdot \cos 60} - \tan 60 \\ &= 3.27 \end{aligned}$$

Ovaj iznos koeficijenta trenja u praksi nije moguć pa sustav nužno mora ubrzavati. Vrijednost ubrzanja a ovisi o intezitetu sile trenja koja pak ovisi o vrijednosti koeficijenta trenja pa za $\mu = 0.4$ imamo:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \cdot (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

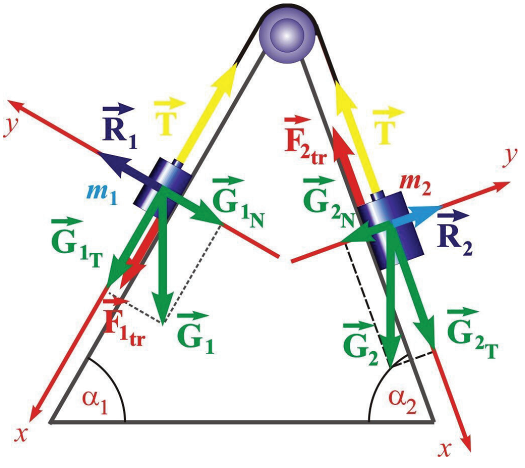
te ubrzanje iznosi

$$a = \frac{5\ kg - 2\ kg \cdot (\sin 60 + 0.4 \cos 60)}{5\ kg + 2\ kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4.02 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

napetost niti T dobivamo iz jedne od jednadžbi za tijelo uvrštavajući vrijednost a:

$$\begin{aligned} T &= m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g - a) \\ T &= 0.59 \cdot m_2 g = 0.59 \cdot 5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 28.94\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.15 *Tijela masa $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ i $m_2 = 15\,\mathrm{kg}$ gibaju se po kosinama nagiba $\alpha_1 = 60^\circ$ i $\alpha_2 = 75^\circ$ respektivno i povezana su pomoću niti preko koloture zanemarive mase. Ako su koeficijenti trenja tijela na kosini $\mu_1 = 0.25$ i $\mu_2 = 0.3$ odredite ubrzanje tijela i napetost niti. Trenje u koloturi zanemarite.*



Slika 3.35.

Rješenje:

Prema II. Newtonovu zakonu jednadžbe gibanja za pojedina tijela su:

Tijelo 1

$$-m_1 g \sin\alpha_1 - \mu_1 m_1 g \cos\alpha_1 + T = m_1 a \tag{3.3.6}$$

Tijelo 2

$$m_2 g \sin\alpha_2 - \mu_2 m_2 g \cos\alpha_2 - T = m_2 a \tag{3.3.7}$$

Zbrajanjem jednadžbi eliminiramo nepoznatu veličinu T pa dobivamo

$$m_1a+m_2a = m_2g\sin\alpha_2-\mu_2m_2g\cos\alpha_2-T-m_1g\sin\alpha_1-\mu_1m_1g\cos\alpha_1+T$$

$$(m_1+m_2)\,a = -m_1g\,(\sin\alpha_1+\mu_1\cos\alpha_1)+m_2g\,(\sin\alpha_2-\mu_2\cos\alpha_2)$$

odnosno ubrzanje je

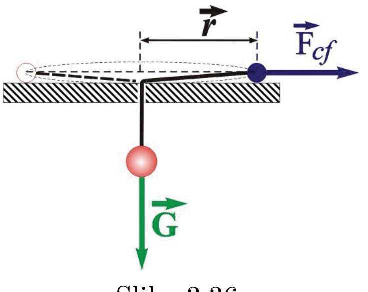
$$\begin{aligned} a &= \frac{-m_1\cdot(\sin\alpha_1+\mu_1\cdot\cos\alpha_1)+m_2\cdot(\sin\alpha_2-\mu_2\cdot\cos\alpha_2)}{m_1+m_2}\cdot g \\ &= \frac{-10\,\mathrm{kg}\,(\sin 60+0.25\cos 60)+15\,\mathrm{kg}\,(\sin 75-0.3\cos 75)}{10\,\mathrm{kg}+15\,\mathrm{kg}}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 1.34\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

uvrstimo li ovaj podatak u jednu od prethodne dvije jednadžbe dobivamo napetost niti T,

$$\begin{aligned} T &= m_1\cdot a+m_1\cdot g\sin\alpha_1+\mu_1\cdot m_1\cdot g\cos\alpha_1 \\ T &= m_1\cdot[a+g\cdot(\sin\alpha_1+\mu_1\cdot\cos\alpha_1)] \\ T &= 110.62\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.16 *Dva mala tijela masa m i $3m$ povezana su međusobno koncem koji je provučen kroz otvor na horizontalnom glatkom stolu. Tijelo mase m rotira po stolu na udaljenosti $r = 0.3\,\mathrm{m}$ od otvora, a drugo tijelo slobodno visi. Koliko okreta u minuti treba vršiti gornje tijelo da bi donje bilo na konstantnoj visini?*

Rješenje:



Slika 3.36.

Da bi donje tijelo bilo na konstantnoj visini, njegovu težinu mora poništiti djelovanje centrifugalne (radijalne) sile rotacije tijela mase m. Dakle, mora biti ispunjen uvjet

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = (3m)\,g \Longrightarrow v = \sqrt{3gr}$$

Kako se traži broj okreta tijela u minuti, prikazano preko kutne brzine to glasi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{60}$$

gdje je n broj okreta u minuti. Veza kutne i obodne brzine daje

$$v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$$
$$n = \frac{60v}{2\pi r} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{3g}{r}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{3\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0.3\,\mathrm{m}}} = 94.581\frac{okr}{\mathrm{min}}$$

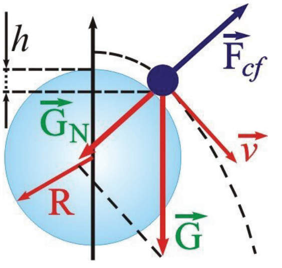
Primjer 3.3.17 *Tijelo malih dimenzija sklizne sa vrha sfere. U kojoj točki će se tijelo odvojiti od površine sfere i nastaviti gibanje zrakom? Polumjer sfere iznosi* $R = 0.45\,\mathrm{m}$. *Sva trenja zanemarite.*

Rješenje:

Tijelo će se odvojiti u onoj točki na sferi gdje će centrifugalna sila poništiti normalnu komponentu težine tijela G_N, odnosno

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}$$

Visinsku razliku od vrha sfere do točke odvajanja označimo sa h, tada je



Slika 3.37.

$$R - h = R\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

a za brzinu tijela (budući da trenje zanemarujemo) imamo

$$v^2 = 2gh$$

Traženi uvjet za točku daje

$$mg\frac{R-h}{R} = \frac{m\cdot 2gh}{R}$$
$$R - h = 2h$$
$$h = \frac{R}{3} = \frac{0.45\,\mathrm{m}}{3} = 0.15\,\mathrm{m}$$

Dakle, tijelo će se odvojiti od površine sfere u točki koja je 15 cm niža od vrha sfere. Točku možemo opisati i kutom na sferi koji opiše radijus vektor tijela tijekom gibanja

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} = \frac{R-\frac{R}{3}}{R} = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48.19^\circ = 0.841\,07\,\mathrm{rad}$$

Primjer 3.3.18 *Hokejski pak mase* $m = 0.16\,\mathrm{kg}$ *miruje u točki* $x = 0$ *na horizontalnoj ledenoj površini. Od trenutka* $t = 0\,\mathrm{s}$ *do* $t = 2\,\mathrm{s}$ *igrač primjenjuje horizontalnu silu* $F = 0.25\,\mathrm{N}$ *na pak. Gdje se nalazi pak u trenutku* $t = 2\,\mathrm{s}$*? Ako se ista sila rimjeni ponovno u vremenskom intervalu od* $5\,\mathrm{s}$ *do* $7\,\mathrm{s}$*, gdje se nalazi pak nakon* $7\,\mathrm{s}$*? Opišite kako bi se gibao pak ako se ledena površina zamjeni površinom za koju je koeficijent trenja između površine i paka* $\mu = 0.1$*?*

Rješenje:

Iz drugog Newtonova zakona

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

dolazi se do izraza za brzinu

$$\begin{aligned} dv &= \frac{F}{m}dt \\ \int_0^{v(t)} dv &= \int_0^t \frac{F}{m}dt \\ v(t) &= \frac{F}{m}t \end{aligned}$$

odakle se za funkciju položajadobiva

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t \\ dx &= \frac{F}{m}tdt \\ \int_0^{x(t)} dx &= \int_0^t \frac{F}{m}tdt \\ x(t) &= \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Nakon dvije sekunde položaj paka jednak je

$$x(2\,\mathrm{s}) = \frac{0.25\,\mathrm{N}}{0.16\,\mathrm{kg}}\frac{(2\,\mathrm{s})^2}{2} = 3.125\,\mathrm{m}$$

Ako se sila primjeni ponovno od pete do sedme sekunde (od druge do pete sekunda pak se giba jednoliko) za položaj slijedi

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{F}{m}t \\
v(2\,\mathrm{s}) &= \frac{0.25\,\mathrm{N}}{0.16\,\mathrm{kg}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 3.125\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v(5\,\mathrm{s}) &= v(2\,\mathrm{s}) = 3.125\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
x(5\,\mathrm{s}) &= x(2\,\mathrm{s}) + v(2\,\mathrm{s}) \cdot (5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}) = 3.125\,\mathrm{m} + 3.125\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s} \\
&= 12.5\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

prijeđeni put od pete do sedme sekunde iznosi

$$\begin{aligned}
x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
x[5\,\mathrm{s}, 7\,\mathrm{s}] &= 3.125\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.25\,\mathrm{N}}{0.16\,\mathrm{kg}} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 9.38\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

pa je ukupni prijeđeni put jednak

$$x(7\,\mathrm{s}) = 12.5\,\mathrm{m} + 9.38\,\mathrm{m} = 21.88\,\mathrm{m}$$

Ako se u obzir uzme i trenje, tada je ubrzanje definirano izrazom

$$\begin{aligned}
ma &= F - F_{tr} = F - \mu mg \\
a &= \frac{F}{m} - \mu g = \frac{0.25\,\mathrm{N}}{0.16\,\mathrm{kg}} - 0.1 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.58\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
x(2\,\mathrm{s}) &= \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.58\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 1.16\,\mathrm{m} \\
v(2\,\mathrm{s}) &= at = 0.58\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s}) = 1.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v(5\,\mathrm{s}) \\
x(5\,\mathrm{s}) &= x(2\,\mathrm{s}) + x[2\,\mathrm{s}, 5\,\mathrm{s}] = 1.16\,\mathrm{m} + 1.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s} = 4.64\,\mathrm{m} \\
x(5\,\mathrm{s}, 7\,\mathrm{s}) &= 1.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 0.58\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 3.48\,\mathrm{m} \\
x(7\,\mathrm{s}) &= 4.64\,\mathrm{m} + 3.48\,\mathrm{m} = 8.12\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Primjer 3.3.19 *Sila F djeluje u vremenskom intervalu $\Delta t = 0.05\,\mathrm{s}$. Prilikom gibanja tijela sila F mijenja svoj intezitet prema relaciji $F = 500ma(1 - kt)$, gdje je $k = 100\,\mathrm{s}^{-1}$. Izračunajte kolika je brzina v u trenutku $t = 0.05\,\mathrm{s}$ ako je početna brzina iznosila $v_0 = 200\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a ubrzanje $a = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.*

Rješenje:

Kao što je poznato, kratkotrajne sile velikog inteziteta nazivaju se impulzivnim silama koje su obično promjenjivog inteziteta. U našem slučaju, djelovanje sile mijenja količinu gibanja tijela po izrazu

$$\begin{aligned}\Delta p &= mv - mv_0 = \int_0^{\Delta t} F dt = \int_0^{\Delta t} \left[500ma\left(1-kt\right)\right] dt \\ &= 500ma \int_0^{\Delta t} \left(1-kt\right) dt = 500ma \left[\Delta t - \frac{k}{2}\left(\Delta t\right)^2\right]\end{aligned}$$

odnosno, nakon dijeljenja izraza sa masom tijela m za konačnu brzinu v dobivamo

$$\begin{aligned}v &= v_0 + 500a\Delta t\left(1 - \frac{k}{2}\Delta t\right) \\ &= 200\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 500 \cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.05\,\mathrm{s}\left(1 - \frac{100\,\mathrm{s}^{-1}}{2} \cdot 0.05\,\mathrm{s}\right) = 87.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Primjer 3.3.20 *Tijelo mase* $m = 3.2\,\mathrm{kg}$ *visi privezano za donji kraj niti koji može izdržati najveću silu napetosti od* $F = 50\,\mathrm{N}$*. Odredite:*

a) kolika je sila napetosti niti ako se gornji kraj niti, zajedno sa niti i tijelom giba vertikalno uvis s ubrzanjem $a_1 = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

b) kolika je sila napetosti niti ako se gornji kraj niti, zajedno sa niti i tijelom giba vertikalno naniže s ubrzanjem $a_2 = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

c) koliko je maksimalno ubrzanje a kojim bi se sustav mogao gibati vertikalno uvis, a da ne dođe do pucanja niti?

Ubrzanje sile zemljine teže je $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, masu niti zanemarite.

Rješenje:

a) Kada je sustav u stanju mirovanja, onda je sila napetosti niti jednaka težini tijela

$$N = mg = 3.2\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 31.392\,\mathrm{N}$$

Ukoliko ubrzavamo sustav vertikalno uvis, na tijelo djeluje i inercijalna sila $F_i = ma_1$ i to u smjeru suprotom od smjera ubrzanja sustava, dakle vertikalno naniže pa je sila napetosti niti jednaka

$$\begin{aligned} N &= mg + F_i = mg + ma_1 = m\,(g + a_1) \\ &= 3.2\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 40.\,992\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

b) U slučaju da sustav ubrzavamo vertikalno naniže, inercijalna sila $F_i = ma_2$ djeluje vertikalno uvis pa je napetost niti jednaka

$$\begin{aligned} N &= mg - F_i = mg - ma_2 = m\,(g - a_2) \\ &= 3.2\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 24.\,992\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

c) Ukupna sila napetosti niti iznosi

$$N = mg + F_i = mg + ma$$

odakle je dopošteno ubrzanje sustava

$$a = \frac{1}{m}\,(N - mg) = \frac{N}{m} - g = \frac{50\,\mathrm{N}}{3.2\,\mathrm{kg}} - 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 5.\,815\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Primjer 3.3.21 *Tijelo mase* $20\,\mathrm{kg}$ *vuče se užetom po horizontalnoj podlozi konstantnom brzinom. Ako je koeficijent trenja klizanja tijela i podloge* $\mu_K = 0.5$ *pod kojim kutom će napetost užeta biti najmanja? Koliki je iznos napetosti užeta u tom trenutku?*

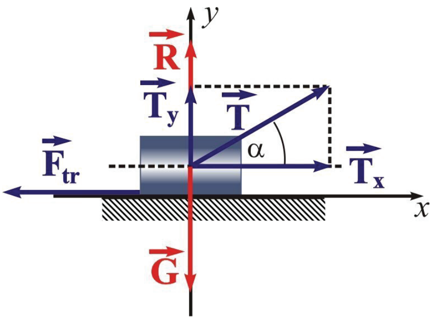
Rješenje:

Budući da je brzina konstantna, primjenom I. Newtonova zakona, jednadžba gibanja će glasiti:

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F_{tr}} = 0$$

Promatrano po komponentama x i y dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{i_X} &= T\cos\alpha - F_{tr} = 0 \\ F_{tr} &= T\cos\alpha \qquad (3.3.8) \\ \sum_i F_{i_Y} &= T\sin\alpha + R - G = 0 \\ R &= G - T\sin\alpha \qquad (3.3.9) \end{aligned}$$



Slika 3.38.

Sila trenja je $F_{tr} = \mu_K \cdot R$ pa povezujući gornje dvije jednadžbe dolazimo do

$$
\begin{aligned}
T\cos\alpha &= \mu_K\,(G - T\sin\alpha) \\
T\cos\alpha &= \mu_K\; mg - \mu_K\; T\sin\alpha \\
\mu_K\; mg &= T\,(\cos\alpha + \mu_K\sin\alpha) \\
T &= \frac{\mu_K\; mg}{\cos\alpha + \mu_K\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

Ovo je funkcija napetosti niti ovisna o kutu α. Da bi napetost niti bila minimalna mora biti zadovoljen uvjet za ekstrem funkcije $T\,(\alpha)$ koji glasi

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{dT}{d\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} &= 0 \\
\left[\frac{dT}{d\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} &= \left[\frac{-\mu_K\; mg\,(-\sin\alpha + \mu_K\;\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_K\sin\alpha)^2}\right]_{\alpha=\alpha_0} = 0
\end{aligned}
$$

Odakle vrijedi

$$
\begin{aligned}
-\sin\alpha_0 + \mu_K\cos\alpha_0 &= 0 \\
\tan\alpha_0 &= \mu_K \\
\alpha_0 &= \arctan\mu_K = \arctan 0,5 \\
\alpha_0 &= 26,56^\circ
\end{aligned}
$$

gdje je α_0 kut pod kojim je napetost niti najmanja. Iznos napetosti niti za taj kut iznosi

$$
\begin{aligned}
T\,(\alpha_0) &= \frac{\mu_K\; mg}{\cos\alpha_0 + \mu_K\;\sin\alpha_0} \\
&= \frac{0,5\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos\,(26,56) + 0,5\,[\sin\,(26,56)]} = 87,74\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Primjer 3.3.22 *Gibanje tijela, koje se spušta niz strmu ravan postavljenu pod kutom α prema horizontu, opisano je jednadžbom $x = bgt^2$, gdje je g - ubrzanje zemljine teže, a b - konstantni koeficijent. Odredite intezitet sile trenja klizanja po ravnoj kosini.*

Rješenje:

Težinu tijela označimo sa G te komponente reakcije strme ravni R i F_{tr}. Postavimo koordinatni sustav tako da os x bude usmjerena paralelno niz kosinu, a os y okomito od kosine. Tada je diferencijalna jednadžba gibanja tijela:

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - F_{tr} \tag{3.3.10}$$

gdje je $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x$ - ubrzanje tijela u smjeru x - osi. Kako je $x = bgt^2$, to je $\ddot{x} = 2bg$. Masa tijela jednaka je $m = \frac{G}{g}$, pa jednadžba (3.3.10) dobiva oblik:

$$m\ddot{x} = \frac{G}{g}2bg = 2bG = G\sin\alpha - F_{tr}$$

odakle slijedi tražena veličina sile trenja

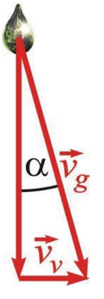
$$F_{tr} = G\left(\sin\alpha - 2b\right)$$

Primjer 3.3.23 *Kapljica kiše pada s velike visine (slika 3.39.) tako da joj je brzina jednaka $v_1 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ u trenutku kad joj je akceleracija jednaka $a_1 = 7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Blizu Zemljine površine kapljica pada jednoliko. Ako je sila otpora zraka proporcionalna s kvadratom brzine i kapljica pada pod kutom $\alpha = 15°$, kolikom brzinom puše bočni vjetar?*

Rješenje:

Jednadžba gibanja za kapljicu je

$$ma = mg - F_{ot}\left(v\right) \tag{3.3.11}$$



Slika 3.39.

gdje je $F_{ot}\left(v\right)$ – sila otpora zraka i vrijedi

$$F_{ot}\left(v\right) = kv^2$$

U trenutku t_1 kapljica ima brzinu v_1 i ubrzanje a_1 pa je

$$\begin{aligned} ma_1 &= mg - kv_1^2 \\ kv_1^2 &= m\left(g - a_1\right) \\ k &= \frac{m\left(g - a_1\right)}{v_1^2} \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

U blizini Zemljine površine kapljica se giba jednolikom brzinom koju nazivamo granična brzina v_g, a sila otpora je zapravo $F_{ot}(v_g)$ pa je ukupna sila koja djeluje na kapljicu jednaka nuli.

$$
\begin{aligned}
0 &= mg - F_{ot}(v_g) \\
0 &= mg - kv_g^2 \\
v_g^2 &= \frac{mg}{k} = \frac{mg}{\frac{m(g-a_1)}{v_1^2}} = \frac{g}{g-a_1} v_1^2 \\
v_g &= v_1 \sqrt{\frac{g}{g-a_1}} = 15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{9,81\ \frac{m}{s^2}}{9,81\ \frac{m}{s^2} - 7\ \frac{m}{s^2}}} \\
v_g &\approx 28 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Iz dijagrama brzina vjetra i granične brzine gibanja kapljice slijedi

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{v_v}{v_g} \\
v_v &= v_g \cdot \sin\alpha = 28 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 15 \approx 7.25 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Primjer 3.3.24 *Izračunajte brzinu i prijeđeni put tijela koje pada u fluidu.*
Pretpostavimo silu trenja (otpor sredstva) proporcionalnu brzini tijela $F_{tr} = -bv$. *Kolika je konačna brzina kojom će tijelo, kada je postigne, padati jednoliko? Nacrtajte* $s(t)$ *i* $v(t)$ *dijagram i uporedite to gibanje sa slobodnim padom (uzgon zraka zanemarite). Računajte sa vrijednosti* $\frac{b}{m} = 0.7\,\mathrm{s}^{-1}$.

Rješenje:

Ovdje imamo primjer gdje je sila proporcionalna brzini. Općenito, ako sila ovisi o brzini $F = f(v)$ probleme rješavamo na slijedeći način:

$$
F = ma = m\frac{dv}{dt} = f(v) \Longrightarrow \int_0^t dt = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}
$$

Nakon integriranja ove jednadžbe nalazimo brzinu v kao funkciju vremena $v(t)$, a odavde:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v(t)\,dt \\ s &= s_0 + \int_0^t v(t)\,dt \end{aligned}$$

Dakle, mi imamo po

$$\sum_i F_i = mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

odnosno

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

Pod pretpostavkom da tijelo krene iz mirovanja $v_0 = 0$, integriranjem dobivamo

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt \Longrightarrow -\frac{1}{\frac{b}{m}}\left[\ln\left(v - \frac{g}{\frac{b}{m}}\right) - \ln\left(-\frac{g}{\frac{b}{m}}\right)\right] = t$$

$$\frac{bt}{m} = -\ln\left[\left(v - \frac{g}{\frac{b}{m}}\right)\left(-\frac{g}{\frac{b}{m}}\right)\right] = -\ln\left(\frac{mg - bv}{b}\frac{b}{mg}\right) = \ln\frac{mg}{mg - bv}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{bt}{m}} &= \frac{mg}{mg - bv} \Longrightarrow e^{-\frac{bt}{m}} = \frac{mg - bv}{mg} = 1 - \frac{b}{mg}v \\ \frac{b}{mg}v &= \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \Longrightarrow v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \end{aligned}$$

Pri padanju u fluidu zbog otpora sredstva ubrzanje se smanjuje i konačno postaje nula, tijelo u tom trenutku postiže konačnu (graničnu) brzinu i dalje se giba jednoliko. Graničnu brzinu određujemo iz uvjeta da je ukupna sila na tijelo jednaka nuli, odnosno da je sila teže jednaka sili trenja

$$\sum_i F_i = mg - bv_g = 0$$
$$mg = bv_g \Longrightarrow v_g = \frac{mg}{b} = 14.014\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

pa se brzina i ubrzanje mogu prikazati pomoću v_g kao

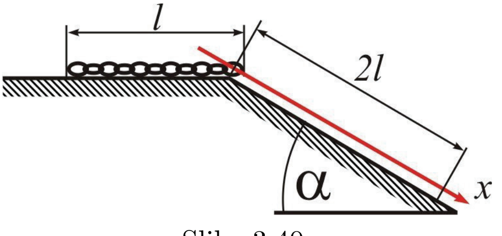
$$v = v_g\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$
$$a = g - \frac{bv}{m} = g - g\left(\frac{b}{mg}\right)v = g\left(1 - \frac{v}{v_g}\right)$$

Put se dobiva integriranjem brzine

$$s = \int_0^t v_g\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)dt = \int_0^t \left(v_g - v_g e^{-\frac{bt}{m}}\right)dt = v_g t + \frac{v_g^2}{g}\left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)$$
$$s = v_g\left[t - \frac{v_g}{g}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)\right] = v_g\left(t - \frac{v}{g}\right)$$

Primjer 3.3.25 *Nerastezljiv i savitljiv lanac duljine $l = 5\,\mathrm{m}$ i linearne gustoće $\mu = \frac{m}{l} = 5\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ počne kliziti s vrha kosine. Kolika je brzina pri dnu kosine čija je duljina $2l$ i nagib $\alpha = 30°$? Trenje između lanca i podloge zanemarite.*

Rješenje:



Slika 3.40.

Ovo je primjer gibanja tijela čija se masa mijenja tijekom gibanja. Ukupna sila koja djeluje na tijelo je tangencijalna komponenta težine. II. Newtonov zakon za ovaj slučaj pišemo u obliku

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = mg\sin\alpha \tag{3.3.13}$$

Ako odaberemo koordinatni sustav tako da ishodište sustava bude na vrhu kosine, os x usmjerimo paralelno niz kosinu, tada će u trenutku

$t = t_0 = 0\ s$ rubni uvjeti glasiti $s_0 = 0\ m$ i $v_0 = 0\frac{m}{s}$. U proizvoljnom trenutku t brzina lanca je v, koordinata početka lanca će biti x, masa lanca koji je na kosini je μx, a sila koja djeluje na cijeli lanac je tada $mg \sin\alpha = \mu x g \sin\alpha$. Jednadžba gibanja je

$$\begin{aligned}
\frac{d\,(mv)}{dt} &= \mu x g \sin\alpha \\
d\,(mv) &= (\mu x g \sin\alpha)\, dt
\end{aligned}$$

Kako bi eliminirali nepoznatu promjenjivu dt, pomnožimo cijelu jednadžbu s mv, tako da na desnoj strani uvrstimo vezu $m = \mu x$, a $v = \frac{dx}{dt}$ pa dobijemo

$$\begin{aligned}
mv \cdot d\,(mv) &= \mu x \cdot \frac{dx}{dt} \cdot (\mu x g \sin\alpha)\, dt \\
mv \cdot d\,(mv) &= \left(\mu^2 x^2 g \sin\alpha\right) dx
\end{aligned}$$

s lijeve strane je sada promjenjiva mv, a s desne x. Integriramo li prethodnu jednadžbu u granicama od početka gibanja $mv = 0,\ \ x = 0$ do kraja $mv = mv,\ \ x = 2l$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{mv} mv\ d\,(mv) &= \int_0^{2l} \left(\mu^2 g \sin\alpha\right) x^2 dx \\
\frac{(mv)^2}{2} &= \frac{8}{3} l^3 \mu^2 g \sin\alpha \\
v^2 &= \frac{16}{3} \frac{l^3 \mu^2 g \sin\alpha}{m^2} \\
v &= 4 \frac{\mu l}{m} \sqrt{\frac{g l \sin\alpha}{3}}
\end{aligned}$$

vratimo se na činjenicu da smo m prikazali u ovisnosti l kao: $m = \mu l$, tada slijedi

$$\begin{aligned}
v &= 4\sqrt{\frac{g l \sin\alpha}{3}} = 4\sqrt{\frac{9.81\frac{m}{s^2} \cdot 5\ m \cdot \sin 30}{3}} \\
v &= 11.436 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Primjer 3.3.26 *Na česticu mase m djeluje sila* $F = F_0\left[1 - \left(\frac{2t-T}{T}\right)^2\right]$ *u vremenskom intervalu* $0 \le t \le T$, *gdje je* F_0 *konstanta. Odredite brzinu čestice na kraju intervala ako čestica na početku miruje* $v_0 = 0$.

Rješenje:
Brzina je jednaka

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t \frac{F(t)}{m}dt + v_0$$

pa dobivamo

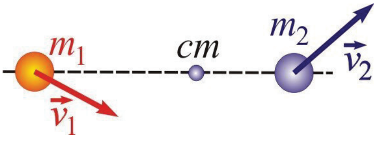
$$v(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m}\left[1 - \left(\frac{2t-T}{T}\right)^2\right] dt$$

pa nakon vremena T dobivamo

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{F_0}{m}\int_0^T \left[1 - \left(\frac{2t-T}{T}\right)^2\right] dt \\ &= \frac{F_0}{m}\frac{2}{3T^2}t^2(3T-2t)\,\Big|_0^T = \frac{2F_0 T}{3m} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.27 *Čestica mase m_1 giba se brzinom $\vec{v}_1$, a čestica mase m_2 brzinom $\vec{v}_2$. Kolika je brzina centra mase tog sustava te brzina i količina gibanja svake čestice s obzirom na sustav vezan za njihov centar mase (slika 3.41.)?*

Rješenje:



Slika 3.41.

Brzina centra mase dana je izrazom

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Ako se brzine čestica s obzirom na sustav vezan za centar mase označe sa $\vec{v}\,'_1$ i $\vec{v}\,'_2$, tada je:

$$\begin{aligned} \vec{v}\,'_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1+m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}'_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \\ &= -\frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1+m_2} \end{aligned}$$

Količine gibanja čestica u sustavu vezanom za centar mase jesu:

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}'_1 &= \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ m_2\vec{v}'_2 &= -\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned}$$

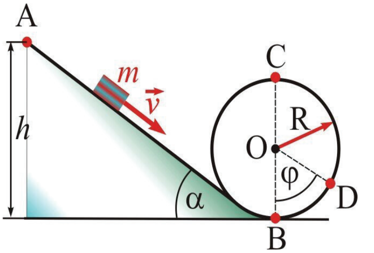
One su jednake po iznosu, a suprotnog su smjera. Ukupna količina gibanja s obzirom na sustav vezan za centar mase jednaka je nuli.

Primjer 3.3.28 *Predmet mase* $m = 5\,\mathrm{kg}$ *klizi niz petlju prikazanu na slici 3.42.. S koje minimalne visine predmet mora krenuti bez početne brzine da bi uspješno napravio petlju polumjera* $R = 1\,\mathrm{m}$*? Kojom silom predmet pritišće podlogu u točkama C i D. Točka D se nalazi na visini od* $0.5\,\mathrm{m}$*? Zanemarite trenje.*

Rješenje:

Tijelo počinje kliziti bez početne brzine. U svakoj točki putanje na tijelo djeluju sila teža $\vec{G} = m\vec{g}$ i sila reakcije podloge $\vec{F}_N$. Za gibanje po kosini prema II. Newtonovu zakonu vrijedi

$$\begin{aligned} mg\sin\alpha &= ma \Longrightarrow a = g\sin\alpha \\ F_N - mg\cos\alpha &= 0 \Longrightarrow F_N = mg\cos\alpha \end{aligned}$$



Slika 3.42.

Brzina na dnu kosine je jednaka

$$v_B^2 = 2as = 2g\sin\alpha \cdot s = 2gh$$

Ako nema trenja, brzina tijela će biti neovisna o nagibu kosine i jednaka je brzini koju bi tijelo imalo pri slobodnom padu s visine h. Slično vrijedi i za gibanja bez trenja po bilo kojoj putanji pa tako i po kružnoj petlji sa slike. Prema tome brzina u točki C jednaka je

$$v_C^2 = v_B^2 - 2g(2R) = 2gh - 4gR,$$

a u točki D

$$v_D^2 = v_B^2 - 2gR\,(1-\cos\varphi) = 2gh - 2gR + 2gR\cos\varphi = v_C^2 + 2gR\,(1-\cos\varphi)$$

Minimalna brzina koju predmet smije imati u točki C dobiva se iz uvjeta da je pri toj brzini reakcija podloge jednaka nuli i da potrebnu centripetalnu silu za kružno gibanje daje sila teža:

$$\begin{aligned} mg &= \frac{mv_C^2}{R} = \frac{2mg\,(h-2R)}{R} \\ R &= 2h - 4R \\ h &= \frac{5R}{2} = \frac{5\cdot 1\,\mathrm{m}}{2} = 2.5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Dužina $\overline{DO}$ sa vertikalom zatvara kut $\varphi = 60°$. Tada predmet u točki D pritišće podlogu silom od

$$\begin{aligned} F_N &= mg\cos\varphi + \frac{mv_D^2}{R} = mg\cdot\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\varphi - 2\right) \\ &= 3mg\cdot(1+\cos\varphi) \\ &= 3\cdot 5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(1+\cos 60) = 220.73\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.29 *Tijelo mase $m = 5\,\mathrm{kg}$ bačeno je u horizontalnome smjeru početnom brzinom $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliki je iznos brzine, tangencijalne i centripetalne sile $t = 2\,\mathrm{s}$ nakon bacanja tijela? Zanemarite otpor zraka.*

Rješenje:

Tijelo opisuje putanju horizontalnog hica (parabolu). U proizvoljnoj točki putanje horizontalna komponenta brzine jednaka je $v_0 = v_x = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i ona se ne mijenja, dok je vertikalna komponenta brzine proporcionalna vremenu i iznosi $v_y = -gt$. Ukupna brzina iznosi

$$v\,(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (-gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

$$v\,(2\,\mathrm{s}) = \sqrt{\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2\cdot(2\,\mathrm{s})^2} = 28.017\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tangencijalna sila je

$$F_t\left(t\right) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \frac{mg^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$F_t\left(2\,\mathrm{s}\right) = \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot\left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2\cdot 2\,\mathrm{s}}{\sqrt{\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2\cdot\left(2\,\mathrm{s}\right)^2}} = 34.349\,\mathrm{N}$$

Ukupna sila jednaka je sili teže pa mora vrijediti

$$\overrightarrow{F}_t + \overrightarrow{F}_{cp} = \overrightarrow{G} \Rightarrow F_{cp}^2 + F_t^2 = G^2$$

odnosno

$$F_{cp}\left(t\right) = \sqrt{G^2 - F_t^2} = \sqrt{\left(mg\right)^2 - \frac{m^2g^4t^2}{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$F_{cp}\left(2\,\mathrm{s}\right) = \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2\cdot\left(2\,\mathrm{s}\right)^2}} = 35.015\,\mathrm{N}$$

Primjer 3.3.30 *Kuglica mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ privezana je na nit duljine $r = 0.6\,\mathrm{m}$ i vrti se po kružnici u vertikalnoj ravnini.*

a) Ispitajte je li kruženje jednoliko?

b) Kolika je napetost konca u najnižoj točki kružnice, ako je brzina u toj točki jednaka $v_n = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

c) Koju najmanju (graničnu) brzinu mora imati kuglica u najvišoj točki da bi gibanje još uvijek bilo kružno?

Rješenje:

a) Na kuglicu djeluju dvije sile: sila teže $\overrightarrow{G} = m\overrightarrow{g}$ i napetost niti $\overrightarrow{N}$ pa je rezultantna sila jednaka

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{N}$$

Rastavimo li rezultantnu silu na tangencijalnu i normalnu komponentu, u odnosu na putanju po kružnici, dobivamo

$$\begin{aligned} F_T &= G\sin\theta = mg\sin\theta \\ F_N &= N - G\cos\theta = N - mg\cos\theta \end{aligned}$$

U tangencijalnom smjeru djeluje sila F_T koja mijenja veličinu brzine i uzrokuje tangencijalnu akceleraciju

$$a_T = \frac{F_T}{m} = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$

Budući da postoji tangencijalna akceleracija, gibanje nije jednoliko.

b) Normalnu (centripetalnu) akceleraciju dobivamo iz normalne komponente sile

$$a_N = \frac{F_N}{m} = \frac{N - mg\cos\theta}{m} = \frac{v^2}{r}$$

odavde je napetost niti jednaka

$$\begin{aligned} \frac{N}{m} &= \frac{v^2}{r} - g\cos\theta \\ N &= m\left(\frac{v^2}{r} - g\cos\theta\right) \end{aligned}$$

U najnižoj točki je $\theta = 0$, brzina jednaka $v_n = v\,(\theta = 0) = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ pa imamo da je napetost niti jednaka

$$\begin{aligned} N &= m\left(\frac{v_n^2}{r} - g\cos\theta\right) = m\left(\frac{v_n^2}{r} - g\right) \\ &= 0.5\,\mathrm{kg}\left[\frac{\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.6\,\mathrm{m}} - 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = 15.928\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

c) U najvišoj točki $\theta = \pi$, pri graničnoj brzini v_g napetost niti N mora biti jednaka nuli, odnosno brzina tijela v mora biti tolika da centrifugalna sila bude veća ili jednaka težini tijela (u graničnom sličaju jednaka težini tijela). Dakle,

$$N = m\left(\frac{v_g^2}{r} + g\cos\pi\right) = m\left(\frac{v_g^2}{r} - g\right) = 0$$

odakle je granična brzina

$$\begin{aligned}\frac{v_g^2}{r} - g &= 0\\ v_g &= \sqrt{gr} = \sqrt{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.6\,\mathrm{m}} = 2.426\,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Primjer 3.3.31 *Klizač mase $M = 75\,\mathrm{kg}$ stoji na ledu i drži u ruci na ramenu kuglu mase $m = 5\,\mathrm{kg}$. Klizač izbaci kuglu prema naprijed pod kutom od $\alpha = 45^\circ$ u odnosu na horizontalnu ravninu, brzinom od $v = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolikom brzinom v' i u kojem će se smjeru klizač pokrenuti prilikom bacanja kugle, uz pretpostavku da se zanemari trenje između klizača, Zemlje i leda.*

Rješenje:

Kako su početne brzine u odabranom sustavu klizača, Zemlje i leda nula, to je ukupna količina gibanja u početku jednaka nuli pa mora biti i u trenutku nakon izbacivanja kugle. Brzina kugle v zatvara kut α sa horizontalom, pa su komponente brzine:

$$\begin{aligned}v_x &= v\cos\alpha\\ v_y &= v\sin\alpha\end{aligned}$$

Primjenjujući zakon održanja količine gibanja (3.1.17) na sustav klizač, Zemlja - kugla, imamo:

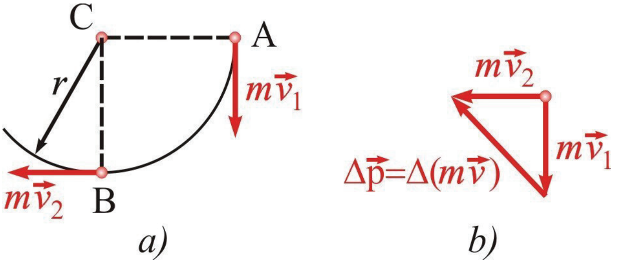
$$\begin{aligned}\sum_i p_{xi} &= mv\cos\alpha + Mv' = 0\\ \sum_i p_{yi} &= mv\sin\alpha + (M_z + M)\,v_z = 0\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{mv\cos\alpha}{M} \\ &= -\frac{5\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{75\,\mathrm{kg}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_z &= -\frac{mv\sin\alpha}{M_z + M} \approx 0 \end{aligned}$$

Predznak „–” ima fizički smisao u tome što označava da je smjer brzie klizača suprotan od horizontalne komponete gibanja kugle, odnosno unatrag. Brzina je Zemlje u vertikalnom smjeru prema dolje, zbog ogromne mase približno nula.

Primjer 3.3.32 *Tijelo mase* $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ *giba se konstantnom brzinom* $v = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *po horizontalnoj kružnoj putanji. Kolika je promjena količine gibanja* $\Delta\vec{p}$ *tijela kada ono prijeđe četvrtinu kružne putanje (slika 3.43)?*



Slika 3.43

Rješenje:

Vektor brzine tijela u točki A označimo sa $\vec{v}_A$, a u točki B sa $\vec{v}_B$. Kako je promjena količine gibanja jednaka

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= m\Delta\vec{v} \\ &= m\left(\vec{v}_B - \vec{v}_A\right) \end{aligned}$$

to je intezitet promjene (zbog okomitosti brzina) jednak

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{(mv_A)^2 + (mv_B)^2} = m\sqrt{v_A^2 + v_B^2} = m\sqrt{2v^2} = \sqrt{2}\,mv \\ &= \sqrt{2}\cdot 0.5\,\mathrm{kg}\cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{2}\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Primjer 3.3.33 *Na vagonu mase $m = 4t$, u obliku platforme, nalazi se čovjek mase $m' = 80\,\mathrm{kg}$. Vagon se giba po horizotalnom kolosjeku bez trenja i ima početnu brzinu v_0. Koliki je prirast brzine vagona ako čovjek počne trčati brzinom $v_1 = 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ u smjeru suprotnom od smjera gibanja vagona i iskoči iz njega u horizontalnom pravcu.*

Rješenje:

Uzmimo da se vagon giba u pozitivnom smjeru osi x. Početna količina gibanja cijelog sustava iznosi

$$p_0 = \left(m + m'\right) v_0$$

dok je konačna količina gibanja jednaka

$$p_k = m\left(v_0 + \Delta v\right)$$

gdje je Δv traženi priraštaj brzine vagona prije iskakanja čovjeka. Uzimajući da je konačna količina gibanja čovjeka

$$p' = m'\left(v_0 + \Delta v - v_1\right)$$

na osnovu zakona održanja količine gibanja dobivamo

$$\begin{aligned}
p_0 &= p_k + p' \\
\left(m + m'\right) v_0 &= m\left(v_0 + \Delta v\right) + m'\left(v_0 + \Delta v - v_1\right) \\
\Delta v &= \frac{m' v_1}{m + m'} = \frac{80\,\mathrm{kg} \cdot 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4000\,\mathrm{kg} + 80\,\mathrm{kg}} = 0.117\,65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Uočimo da priraštaj brzine vagona uopće ne ovisi od početne brzine v_0 sustava.

Primjer 3.3.34 *Vagon u obliku platforme, mase M nalazi se u stanju mirovanja i na njemu stoji n ljudi. Neka je masa svakog čovjeka m. Hoće li vagon dobiti veću brzinu ako ljudi jedan po jedan, tj. jedan iza drugog, iskaču iz vagona brzinom v, ili ako bi svi istovremeno potrčali i iskočili iz vagona istom brzinom v? Zanemariti trenje između vagona i kolosjeka.*

Rješenje:

Kada ljudi trče zajedno i istovremeno iskaču iz vagona, to je onda analogno situaciji kada bi trčao jedan čovjek mase nm. Na osnovu zakona očuvanja količine gibanja imamo

$$\begin{aligned}(M+nm)\,v_1 &= nmv \\ v_1 &= n\cdot\frac{mv}{M+nm}\end{aligned}$$

Ako ljudi trče jedan za drugim, po zakonu očuvanja količine gibanja, brzina vagona će biti

$$\begin{aligned}v_2 &= \frac{mv}{M+nm}+\frac{mv}{M+(n-1)\,m}+\frac{mv}{M+(n-2)\,m}+\cdots+\frac{mv}{M+m} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{mv}{M+im}\end{aligned}$$

No, kako vrijedi

$$\frac{mv}{M+nm}<\frac{mv}{M+(n-1)\,m}<\frac{mv}{M+(n-2)\,m}<\cdots<\frac{mv}{M+m}$$

to mora vrijediti i nejednakost

$$n\cdot\frac{mv}{M+nm}<\frac{mv}{M+nm}+\frac{mv}{M+(n-1)\,m}+\cdots+\frac{mv}{M+m}$$

pa je

$$v_1<v_2$$

odnosno, vagon će dobiti veću brzinu ako s njega iskaču jedan za drugim n ljudi, nego li kad s njega iskoče svi istovremeno.

Primjer 3.3.35 *Raketa početne mase m_0 izbacuje plinove brzinom $v_p = 400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ u odnosu prema raketi. Uz pretpostavku da nema vanjskih sila, izračunajte brzinu rakete nakon što je izgorilo 10% početne mase.*

Rješenje:
Iz zakona očuvanja količine gibanja imamo

$$p = mv = konst.$$

deriviranjem dobivamo

$$\frac{d\,(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = 0$$

odakle dobivamo jednadžbu

$$m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt}$$

Ovdje je $v = v_p$ brzina izbacivanja plina u odnosu na raketu. Separacijom varijabli slijedi

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_p}dv$$

Koristimo početne uvjete, brzina na početku gibanja jednaka je nuli, a masa sustava m, dok je nakon izvjesnog vremena brzina v, a preostala masa jednaka je $m = m_0 - 0.1m_0 = 0.9m_0$. Integriranjem tada dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} &= -\frac{1}{v_p}\int_{0}^{v} dv \\
\ln m &\mid {}_{m_0}^{m} = -\frac{1}{v_p}\,(v)\,|_0^v \\
\ln m - \ln m_0 &= -\frac{1}{v_p}\,(v-0) \\
v &= -v_p \ln\frac{m}{m_0} = -v_p \ln 0.9 \\
&= -\left(400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\cdot(-0.105\,36) \\
&= 42.\,144\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Primjer 3.3.36 *Raketa mase $m = 60$ t izbacuje plinove brzinom $v_p = 2000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i nakon izgaranja goriva postigne brzinu od $v = 8000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolika je masa prazne rakete bez goriva? Pretpostavite da na raketu ne djeluju vanjske sile i da je lansirana bez početne brzine.*

Rješenje:

S obzirom da je cjelokupno gorivo sagorjelo, preostala masa jednaka je masi prazne rakete. Iz integrala

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_p} \int_0^v dv$$

kao u prethodnom primjeru tražimo preostalu masu m.

$$\begin{aligned} \ln m - \ln m_0 &= -\frac{1}{v_p}(v-0) \\ \ln \frac{m}{m_0} &= -\frac{v}{v_p} \\ m &= m_0 e^{-\frac{v}{v_p}} = 60\ t \cdot e^{-\frac{8000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} = 60000\,\mathrm{kg} \cdot e^{-4} \\ &= 1098.9\,\mathrm{kg} \approx 1.1\ t \end{aligned}$$

Primjer 3.3.37 *Raketa mase* $m = 20\,\mathrm{kg}$ *lansirana je iz mirovanja vertikalno u vis. Izbacivši* $m' = 0.4\,\mathrm{kg}$ *plina, nakon prve sekunde raketa postigne brzinu* $v = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Kolika je brzina izbacivanja plinova u odnosu na raketu? Treba u račun uvrstiti da se raketa giba u gravitacijskom polju Zemlje.*

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka vidimo da je brzina sagorjevanja plina jednaka $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 0.4\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ pa nam se preostala masa plina u raketi mijenja po zakonu $m_p(t) = m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot t$. Koristeći II. Newtonov zakon dobivamo

$$\begin{aligned} -v_p \frac{dm}{dt} &= m\left(\frac{dv}{dt} + g\right) \\ \frac{dm}{m} &= -\frac{1}{v_p}\left(\frac{dv}{dt} + g\right) dt / \int \\ \int_{m_0}^{m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t}t} \frac{dm}{m} &= -\frac{1}{v_p}\left(\int_0^v dv + \int_0^t g dt\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} t\right) - \ln m_0 &= -\frac{1}{v_p}(v + gt) / \cdot (-v_p) \\ v_p \ln \frac{m_0}{m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} t} &= v + gt \end{aligned}$$

odakle slijedi izraz za brzinu gibanja rakete u gravitacijskom polju

$$v\left(t\right)=v_p\ln\frac{m_0}{m_0-\frac{\Delta m}{\Delta t}t}-gt$$

ili

$$v_p=\frac{v\left(t\right)+gt}{\ln\frac{m_0}{m_0-\frac{\Delta m}{\Delta t}t}}$$

Koristeći početni uvjet $v\left(1\,\mathrm{s}\right)=20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ imamo

$$v_p=\frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot1\,\mathrm{s}}{\ln\frac{20\,\mathrm{kg}}{20\,\mathrm{kg}-0.4\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot1\,\mathrm{s}}}=1475.\,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

3.4 Zadatci

Problem 3.4.1 *Dvije kugle jednakog polumjera, jedna od željeza, druga od olova gibaju se jednakom brzinom. Izračunajte njihov odnos količina gibanja?*

Rezultat: $\frac{p(Fe)}{p(Pb)} = \frac{\rho(Fe)}{\rho(Pb)} = \frac{7.9}{11.3} = 0.699\,12$.

Problem 3.4.2 *Na tijelo mase* $m = 10\,\mathrm{kg}$ *djeluju dvije sile jednakog iznosa od* $F = 20\,\mathrm{N}$. *Izračunajte smjer i iznos akceleracije ako sile međusobno zatvaraju kut od* $\varphi = 120°$.

Rezultat: $a = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, akceleracija zatvara kut od $\theta = 60°$s obje sile, odosno leži na pravcu koji polovi kut φ.

Problem 3.4.3 *Neki putnički automobil može postići akceleraciju* $a = 2.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *kada mu je ukupna masa jednaka* $m = 1600\,\mathrm{kg}$. *Koliku će akceleraciju postići ako mu se zbog dodatnog tereta masa poveća na* $2000\,\mathrm{kg}$, *a sila automobila ostane ista?*

Rezultat: $a = 2.32\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 3.4.4 *Na horizontalnoj podlozi nalazi se tijelo mase* $m = 50\,\mathrm{kg}$.
Kolikom horizontalnom silom treba djelovati na tijelo da bi se ono pokrenulo? Koeficijent trenja između tijela i podloge iznosi $\mu = 0.2$.

Rezultat: $F = 98.1\,\mathrm{N}$

Problem 3.4.5 *Na vertikalnom dijelu kolica koja se gibaju ubrzanjem a, nalazi se tijelo A. Koeficijent trenja između tijela A i površine vertikalnog dijela kolica iznosi* $\mu = 0.3$. *Koliko treba biti minimalno ubrzanje kolica da tijelo ne padne?*

Rezultat: $a \geq \frac{g}{\mu} = 32.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Problem 3.4.6 *Koliki je najveći nagibni kut koji može da zauzme biciklista prema putu (ako se giba po pravcu) bez bojazni da padne? Koeficijent trenja između biciklista i puta je* μ.

Rezultat: $\alpha = \operatorname{arccot}\mu$.

Problem 3.4.7 *Koliki mora biti minimalni koeficijent trenja između puta i automobila, da bi se automobil mogao penjati uz put nagiba* $\alpha = 30^\circ$ *ubrzanjem* $a = 0.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*?*

Rezultat: $\mu = 0.7$.

Problem 3.4.8 *Uz kosinu nagiba* $\alpha = 30^\circ$ *giba se tijelo mase* $m = 10\,\mathrm{kg}$*. Kolika mora biti vučna sila* F *koja s kosinom zatvara kut* $\beta = 30^\circ$ *da bi se tijelo, uz koeficijent trenja tijela i podloge* $\mu = 0.3$*, gibalo jednoliko ubrzano uz kosinu akceleracijom* $a = 0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*?*

Rezultat: $F = \frac{1+\sin\alpha+\mu\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}mg = 78\,\mathrm{N}$.

Problem 3.4.9 *Skijaš se počinje spuštati bez početne brzine niz brijeg dugačak* $l = 120\,\mathrm{m}$ *s visinskom razlikom* $h = 16\,\mathrm{m}$*. Došavši do podnožja brijega nastavi gibanje po horizontalnome putu sve do zaustavljanja. Koliku će brzinu imati skijaš na podnožju brijega? Koliko daleko od podnožja će se zaustaviti? Koeficijent trenja iznosi* $\mu = 0.04$*.*

Rezultat: $v = \sqrt{2g\left(h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)} = 14.852\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $s = \frac{v^2}{2\mu g} = 281.07\,\mathrm{m}$.

Problem 3.4.10 *Tijelo počne iz stanja mirovanja kliziti sa krova kuće visoke* $H = 20\,\mathrm{m}$*. Duljina krova iznosi* $d = 8\,\mathrm{m}$*, a kut nagiba krova prema horizontali* $\alpha = 35^\circ$*. Koeficijent trenja između tijela i krova iznosi* $\mu = 0.45$*. Izračunajte vrijeme* t *koje će tijelo provesti u gibanju, udaljenost* D *od podnožja kuće do mjesta gdje će tijelo pasti te iznos i komponente brzine* $\vec{v}$ *tijela u trenutku neposredno prije udara o tlo.*

Rezultat: $t = 2.76\,\mathrm{s}$; $D = 5.64\,\mathrm{m}$; $v_x = 5.38\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_y = -17.97\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v = 18.76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Problem 3.4.11 *Lopta mase* $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ *pada s visine* $h = 5\,\mathrm{m}$*, na horizontalnu podlogu i odbije se elastično, tako da se pri sudaru promijeni samo smjer, ali ne i iznos brzine. Odredite impuls sile koji je u sudaru primila lopta.*

Rezultat: $I = 4\,\mathrm{N\,s}$.

Problem 3.4.12 *Tijelo leti brzinom* $v = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *i raspadne se na dva jednaka dijela. Jedan dio nastavi gibanje brzinom* $v_1 = 380\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *u istom smjeru. Kolika je brzina drugog dijela?*

Rezultat: $v = 220\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i ima isti smjer kao i prvo tijelo.

Problem 3.4.13 *Dječak na kolicima koja miruju izbaci loptu mase* $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ *brzinom os* $v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *u horizontalnome smjeru iza kolica. Masa kolica s dječakom iznosi* $m_{dk} = 60\,\mathrm{kg}$. *Kolika će biti brzina kolica i dječaka neposredno nakon izbacivanja lopte?*

Rezultat: $v' = 1.67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 3.4.14 *S krme malog čamca koji se giba brzinom* $v_1 = 0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *izbaci ribar mrežu prema natrag. Kolikom brzinom* v' *je ribar izbacio mrežu, ako čamac s ribarom poslije izbacivanja mreže ima brzinu od* $v_1' = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*? Mase su čamca* $m_{č} = 50\,\mathrm{kg}$, *masa ribara* $m_r = 80\,\mathrm{kg}$ *i masa mreže* $m_m = 20\,\mathrm{kg}$.

Rezultat: $v' = 2.75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 3.4.15 *Početna je masa rakete* $m_0 = 200\ t$, *a nakon izgaranja goriva masa rakete je* $m = 180\ t$. *Ako se iz rakete svake sekunde izbaci* $\Delta m = 1000\,\mathrm{kg}$ *plina brzinom* $v_p = 4000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, *kolika je konačna brzina rakete? Pretpostavite da je raketa lansirana bez početne brzine s površine Zemlje vertikalno u vis. Pretpostavite da je sila teže koja djeluje na raketu za vrijeme promatranog gibanja konstantna.*

Rezultat: $v = 196\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 3.4.16 *Blok mase* m_1 *nalazi se na bloku mase* m_2 *koji leži na glatkom horizontalnom stolu. Ako je koeficijent trenja između blokova* μ, *nađite najveću silu kojom se može djelovati na* m_2 *tako da* m_1 *ne može skliznuti.*

Rezultat: Maksimalna sila je $F_{\max} = (m_1 + m_2)\,\mu g$

Problem 3.4.17 *Kutija težine* mg *vuče se silom* F *pod kutom* α *u odnosu na horizontalnu ravninu.*

(a) Odredite silu kojom pod djeluje na kutiju.

(b) Odredite ubrzanje kutije ako je koeficijent trenja s podom μ.

(c) Kako bi se rezultati promijenili ako se kutija gurne istom silom pod istim kutom?

Rezultat:
(a) $N = mg - F \sin\alpha$
(b) $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - \mu g$
(c) $N' = mg + F \sin\alpha$, $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu \sin\alpha) - \mu g$

Problem 3.4.18 *Tijelo klizi niz kosinu čiji je koeficijent trenja* $\mu = 0.5$. *Nađite kut nagiba* α *ako je normalna reakcija dvostruko veća od rezultantne sile prema dolje duž nagiba.*

Rezultat: $\alpha = 45^\circ$

Problem 3.4.19 *Dvije mase* m_1 *i* m_2 *spojene su nerastegljivom niti koja prolazi preko glatke koloture zanemarive mase. Odredite akceleraciju središta mase sustava.*

Rezultat: Ubrzanje centra mase jednako je

$$a = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot g$$