Jadranko Batista • Zoran Primorac

MEHANIKA

METODIČKA ZBIRKA ZADATAKA S RJEŠENJIMA

Jadranko Batista • Zoran Primorac

MEHANIKA

METODIČKA ZBIRKA ZADATAKA S RJEŠENJIMA

(II. izdanje)

NAKLADNIK
Sveučilište u Mostaru
PRES SUM

ZA NAKLADNIKA
prof. dr. sc. Zoran Tomić, rektor

RECENZENTI
prof. dr. sc. Mile Dželalija
prof. dr. sc. Slavica Brkić

LEKTURA I KOREKTURA
Ita Šakota

GRAFIČKO OBLIKOVANJE
Damir Zadro

ISBN 978-9926-28-051-2
CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske
biblioteke BiH pod ID brojem 58723590

Jadranko Batista • Zoran Primorac

MEHANIKA

METODIČKA ZBIRKA ZADATAKA S RJEŠENJIMA

(II. izdanje)

PRESSUM

Mostar, 2024.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka je uglavnom namijenjena studentima Studija fizike i Studija kemije na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti
Sveučilišta u Mostaru. Zbirkom se mogu koristiti i studenti srodnih fakulteta.

Zbirka je podijeljena na jedanaest poglavlja, a na kraju knjige se nalazi Dodatak koji sadrži odgovarajuće tablice i osnovne matematičke operacije koje su neophodni podsjetnik za rješavanje problema i zadataka. Zbirka je strukturirana po određenim metodičkim principima namijenjenim za odgovarajući profil i uzrast studenata; svako poglavlje ima uvodni dio koji predstavlja odgovarajuće teorijske osnove, zatim slijedi skup problemskih pitanja sa odgovorima čiji cilj je pojmovno strukturiranje fizikalnih teorijskih osnova, zatim slijede potpuno riješeni primjeri, a na kraju poglavlja nalaze se zadaci za vježbu uz koje je naveden konačni rezultat.

Dobro ovladati znanjem iz fizike znači njezine zakonitosti znati stvaralački primijeniti u praksi. Predavanja iz fizike mogu biti uspješna samo ako su upotpunjena odgovarajućim vježbama na kojim se izvodi mjerenje, odnosno na kojima se rješavaju zadaci. Nastojali smo odabrati primjere koje će studenti koristiti u daljnjem studiju i kasnije u praksi. Ti će primjeri biti korisni i za širi krug stručnjaka, jer je fizika temelj mnogih disciplina.

Autori su koristili mnogobrojnu literaturu, a popis najviše korištene nalazi se na kraju knjige. Većina je zadataka rađena na auditornim vježbama ili su posljednjih nekoliko godina zadavani kao ispitni zadaci na odgovarajućem kolegiju.

U Mostaru, studeni 2023.

Autori

Poglavlje 1

VEKTORI I SKALARI

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Definicija 1.1.1 ***Skalari*** *su one veličine koje se jednoznačno mogu opisati svojom brojčanom vrijednosti (skalarom, brojem)*

Definicija 1.1.2 ***Skalarne fizikalne veličine*** *se, osim skalarom, opisuju i pripadnom jedinicom (npr. masa* $m = 50$ *kg, udaljenost* $l = 20$ *m itd.)*

Definicija 1.1.3 ***Vektor*** $\overrightarrow{AB}$ *je usmjerena dužina* $\overline{AB}$ *kojoj je točka* A *početna, a točka* B *krajnja točka.*

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je jedinstveno određen trima veličinama:

1. pravcem p koji prolazi kroz točke A i B;
2. smjerom $A \rightarrow B$ od početne točke A do krajnje točke B
3. te intezitetom $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overline{AB}$, (iznos ili modul) što je „međusobna udaljenost točaka A i B". Vektore označavamo strelicom iznad simbola fizikalne veličine, a grafički se opisuje usmjerenom dužinom.

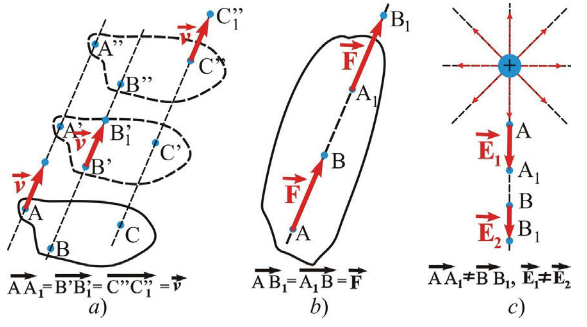
Definicija 1.1.4 ***Vektorske fizikalne veličine*** *se osim vektorom opisuju i pripadnom fizikalnom jedinicom.*

[(Npr. $v = 10\ \frac{m}{s}$, u smjeru od juga prema sjeveru, čime je zadan pravac i smjer ili sila $\overrightarrow{F} = \left(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)\ N$)].

Iako vektorske fizikalne veličine imaju sva svojstva matematičkog vektora, oni mogu imati neka dodatna svojstva koja slijede iz same fizičke naravi veličine koju opisuju. Iz ove naravi fizičke veličine slijede i određena svojstva pridodanom vektoru, koja inače vektori kao matematičke veličine ne posjeduju. S obzirom na ta dodatna svojstva imamo tri vrste vektora u fizici; slobodni, klizni i vezani vektori.

1. **Slobodni vektor** - kod slobodnog vektora napadna se točka može odabrati proizvoljno u prostoru. Slobodni vektor se može pomicati paralelno samom sebi prema potrebi, a da se pri tome ne izmjeni (ovo je svojstvo vektora koje proučava matematika). Kao primjer slobodnog vektora uzet ćemo brzinu translatornog gibanja jednog tijela (slika 1.1.a). Sve točke tijela pri translaciji imaju istu brzinu pa možemo proizvoljno izabrati napadnu točku vektora brzine.

2. **Klizni vektor** - kod kliznog vektora početna se točka vektora može pomicati samo po pravcu koji se poklapa s pravcem vektora. Primjer kliznog vektora je vektor sile koji djeluje na kruto tijelo. Pomicanjem napadne točke sile duž pravca koji se poklapa sa pravcem sile neće promijeniti prvobitno gibanje (slika 1.1.b).



Slika 1.1.

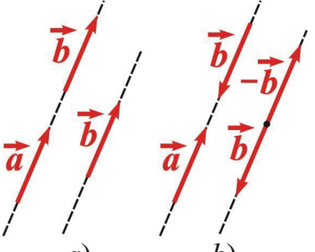
3. **Vezani vektor** - kod vezanog vektora određena je početna točka pa se vektor ne može pomicati jer je u drugim točkama različit. Primjer vezanog vektora je vektor polja gdje u svakoj točki polja imamo različit vektor kao predstavnika fizičke veličine u određenom polju (slika 1.1.c).

Osnovna svojstva i operacije s vektorima

Matematička teorija koja pručava svojstva vektora, kao i operacije s vektorima naziva se vektorska algebra. Osnovne definicije vektorske algebre su:

Definicija 1.1.5 ***Jednakost vektora*** *- dva vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su jednaka, označavamo sa $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, ako imaju isti iznos, isti smjer i leže na istim ili paralelnim pravcima (slika 1.2.a).*

Definicija 1.1.6 ***Suprotni vektor*** *- vektor $\overrightarrow{a}$ je suprotan vektoru $\overrightarrow{b}$, označavamo sa $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b}$, ako imaju isti iznos, leže na istim ili paralelnim pravcima i imaju suprotan smjer (slika 1.2.b).*



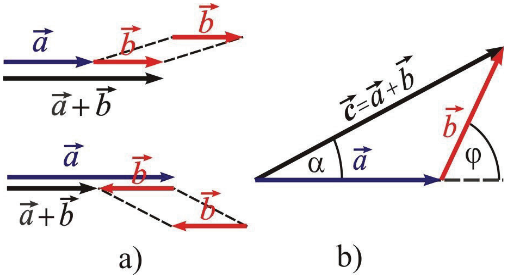
$a)$ $b)$

Slika 1.2.

Definicija 1.1.7 ***Zbrajanje vektora*** *- zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, označavamo sa $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ i određuje se tako da se paralelnom translacijom početna točka vektora $\overrightarrow{b}$ dovede na krajnju točku vektora $\overrightarrow{a}$; rezultantni vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ jest vektor povučen od početka vektora $\overrightarrow{a}$ do kraja vektora $\overrightarrow{b}$.*

Dva vektora su kolinearna ako leže na istom ili na paralelnim pravcima. Za dva vektora kažemo da su nekolinearni ako ne leže na istom pravcu ili ako leže na pravcima koji nisu paralelni.

Kolinearne vektore zbrajamo tako da im jednostavno zbrojimo iznose (ako imaju isti smjer) ili im oduzmemo iznose (ako su suprotnog smjera, pri čemu zadržavamo smjer onog vektora čiji je iznos veći), a pravac tih vektora ostaje isti (slika 1.3.a).



Slika 1.3.

Nekolinearne vektore zbrajamo ili oduzimamo preko def. 1.1.7. Iznos rezultante može se izračunati i pomoću kosinusova poučka

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\left(\measuredangle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)} \tag{1.1.1}$$

Smjer rezultante se tada određuje kutom α (slika 1.3.b).

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Napomena: Kada imamo dva vektora koristimo metodu paralelograma ili trokuta koja je određena na konstrukciju paralelograma gdje je dijagonala rezultantni vektor.

Definicija 1.1.8 ***Razlika vektora*** - *razliku vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, označavamo sa*
$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ svodimo na zbrajanje vektora $\overrightarrow{a}$ sa suprotnim vektorom vektora $\overrightarrow{b}$, dakle rezultantni vektor je $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right)$.

Definicija 1.1.9 ***Nul vektor*** - *ako je vektor $\overrightarrow{a}$ jednak vektoru $\overrightarrow{b}$, tada razlika vektora $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ definira nul vektor, koji označavamo sa $\overrightarrow{0} = \ominus$. Iznos nul vektora je nula $|\ominus| = 0$, a nema određeni smjer.*

Definicija 1.1.10 ***Množenje vektora skalarom*** - *umnožak vektora $\overrightarrow{a}$ brojem (skalarom) m nazivamo novi vektor $m\overrightarrow{a}$ kojem je duljina $a \cdot |m|$ i leži na istom pravcu kao i vektor $\overrightarrow{a}$, a smjer mu je isti ako je $m > 0$ ili suprotan ako je $m < 0$. Ako je $m = 0$ dobivamo nul vektor $\overrightarrow{0} = \ominus$.*

Definicija 1.1.11 ***Jedinični vektor*** - *je svaki vektor kod kojeg je iznos jednak jedinici.*

Jedinični vektor u smjeru vektora $\overrightarrow{a}$ je vektor $\overrightarrow{a}_0$ koji ima intezitet jednak jedinici, a dobijemo ga tako što vektor $\overrightarrow{a}$ podijelimo s njegovim intezitetom a. Tako možemo pisati $\overrightarrow{a}_0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{\overrightarrow{a}}{a}$. Na ovaj način možemo svaki vektor prikazati kao umnožak njegovog inteziteta i jediničnog vektora u tom smjeru $\overrightarrow{a} = a \cdot \overrightarrow{a}_0$.

Definicija 1.1.12 ***Skalarni produkt*** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je skalar definiran izrazom*

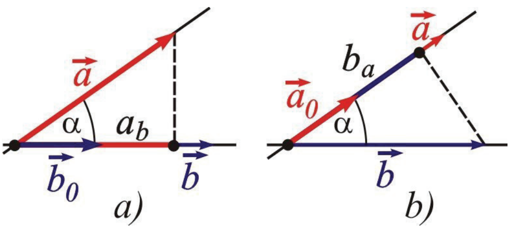
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab \cos\left(\measuredangle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \tag{1.1.2}$$

Možemo definirati intezitet vektora preko skalarnog umnoška kao

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = \sqrt{a \cdot a \cdot \cos 0} = \sqrt{a^2} = a \tag{1.1.3}$$

Definicija 1.1.13 ***Skalarna projekcija vektora*** $\overrightarrow{a}$ *na vektor* $\overrightarrow{b}$ *je skalar* a_b *definiran pomoću izraza*

$$a_b = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}_0 = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{b} = a \cos\left(\measuredangle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a \cos \alpha \tag{1.1.4}$$



Slika 1.4.

Za a_b (slika 1.4.a) kažemo da je skalarna komponenta vektora $\overrightarrow{a}$ u smjeru vektora $\overrightarrow{b}$. Sada svaki vektor možemo projicirati na proizvoljni pravac. Na isti način smo mogli napraviti skalarnu projekciju vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$, tako što krajnju točku vektora $\overrightarrow{b}$ projiciramo na pravac vektora $\overrightarrow{a}$. Početna točka vektora $\overrightarrow{b}$ i projekcija vrha vektora na pravac, definiraju duljinu koja je zapravo projekcija vektora $\overrightarrow{b}$ označena sa b_a (slika 1.4.b).

Definicija 1.1.14 ***Kartezijev koordinatni sustav*** *u prostoru zadan je sa tri međusobno okomite koordinatne osi* x, y *i* z *sa zajedničkom točkom* O *koju nazivamo ishodište koordinatnog sustava. Tada je svaka točka* T *u prostoru zadana uređenom trojkom brojeva* (x, y, z) *i pišemo* $T = T(x, y, z)$.

Jedinični vektori za pojedine koordinatne osi su: za os x - apscisa je $\overrightarrow{i}$, za os y - ordinata je $\overrightarrow{j}$ i za os z - aplikata je $\overrightarrow{k}$.

Skalarni produkt jediničnih vektora dobiva se pomoću definicije skalarnog produkta vektora (def. 1.1.12) i možemo ih prikazati pomoću tablice kao

$\cdot$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	1	0	0
$\overrightarrow{j}$	0	1	0
$\overrightarrow{k}$	0	0	1

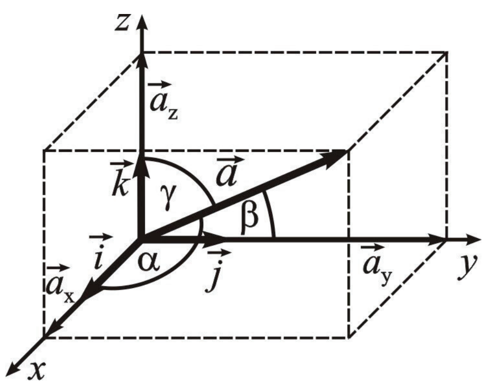
Sada pomoću projekcije vektora svaki vektor možemo prikazati preko njegovih komponenti u koordinatnom sustavu

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \tag{1.1.5}$$

gdje su a_x, a_y, a_z skalarne komponente vektora $\overrightarrow{a}$ na pojedine osi x, y, z koordinatnog sustava.

Jednadžbu (1.1.5) nazivamo koordinatnim prikazom vektora. Skalarne komponente vektora dobijemo pomoću definicije 1.1.13:

$$\begin{aligned} a_x &= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i} \\ a_y &= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j} \\ a_z &= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{k} \end{aligned}$$



Slika 1.5.

Prikažu li se vektori preko skalarnih komponenti u koordinatnom sustavu, tada je skalarni umnožak vektora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \cdot \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) && (1.1.6) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z && (1.1.7) \end{aligned}$$

Koristeći definiciju inteziteta vektora (1.1.3) preko skalarnog produkta, možemo intezitet vektora prikazati preko skalarnih komponenti kao:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.1.8}$$

Definicija 1.1.15 ***Radijus vektor položaja*** *točke T u prostoru je definiran vektorom kojem je početne točka ishodište koordinatnog sustava, a krajnja točka točka T,* $\overrightarrow{OT} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

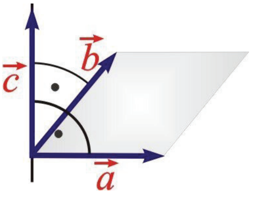
Iznos radijus vektora položaja točke T u prostoru jednak je udaljenosti točke T od ishodišta koordinatnog sustava:

$$\left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Definicija 1.1.16 ***Vektorski produkt*** $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor čiji iznos definiramo izrazom*

$$|\overrightarrow{c}| = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = ab\sin\left(\measuredangle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

Vektor $\overrightarrow{c}$ *je okomit na vektore* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*, a smjer mu se određuje pravilom desne baze (desne ruke)*



Slika 1.6.

Iznos vektorskog produkta brojčano je jednak površini paralelograma kojemu su stranice vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ (slika 1.6.). Prikažu li se vektori pomoću skalarnih komponenti u pravokutnom koordinatnom sustavu, vektorski umnožak se može pisati u obliku determinante

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.1.9}$$

što prikazano preko komponenti daje:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \left(a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}\right) \times \left(b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}\right) \\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_yb_z - a_zb_y)\,\overrightarrow{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\overrightarrow{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Definicija 1.1.17 ***Površina paralelograma*** *razapetog vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *jednaka je*

$$P_{\square} = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$$

Definicija 1.1.18 ***Površina trokuta*** *razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jednaka je*

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$$

Definicija 1.1.19 ***Mješoviti produkt vektora*** *$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ nazivamo izraz oblika $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$.*

Ako su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ zadani preko komponenti u pravokutnom koordinatnom sustavu, tada mješoviti produkt možemo prikazati pomoću determinante kao

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.1.10}$$

ili

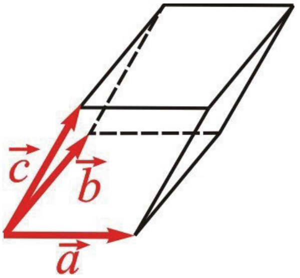
$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right) + a_y\left(b_z c_x - b_x c_z\right) + a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right)$$

Definicija 1.1.20 ***Volumen paralelopipeda*** *razapetog vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jednak je (slika 1.7.) apsolutnoj vrijednosti mješovitog umnoška tih vektora*

$$V = \left|\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}\right|$$

1.2 Problemski zadaci

Problem 1.2.1 *Dana su tri vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. Koji uvjet trebaju ispuniti da se od njh može formirati trokut?*



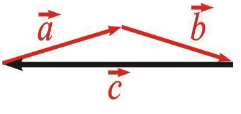
Slika 1.7.

Odgovor:

Da bi formirali trokut vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ moraju zadovoljavati uvjet da je njihov vektorski zbroj jednak nuli, odnosno ta tri vektora moraju sačinjavati trokut (slika 1.8.)

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$$

Problem 1.2.2 *Koji uvjet moraju ispunjavati vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, da bude $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ normalno na $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$?*



Slika 1.8.

Odgovor:

Budući da je skalarni produkt dva okomita vektora jednak nuli, dovoljno je da bude zadovoljen slijedeći uvjet

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = 0$$

Množenjem dobivamo:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

kako je zbog osobine komutativnosti skalarnog produkta vektora

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} \Longrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

Skalarni umnožak vektora sa samim sobom jednak je kvadratu inteziteta vektora pa vrijedi

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a^2, \ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = b^2$$

odakle dobivamo traženi uvjet

$$a^2 = b^2$$

Problem 1.2.3 *Objasnite kada je skalarni produkt $c = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ maksimalan, a kada minimalan?*

Odgovor:
Po definiciji skalarnog umnoška

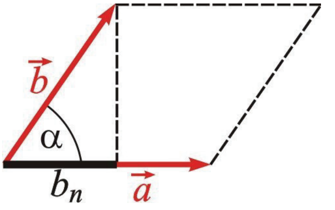
$$c = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_n \cdot b = a \cdot b_n$$

vrijedi

$$\begin{aligned} c_{\max} &= a \cdot (b_n)_{\max} \\ c_{\min} &= a \cdot (b_n)_{\min} \end{aligned}$$

Iz slike 1.9. vidimo da je $(b_n)_{\max} = b$ za $\alpha = 0°$ i $(b_n)_{\min} = 0$ za $\alpha = 90°$.

Problem se može riješiti i preko trigonometrijskih funkcija. Skalarni umnožak je tada



Slika 1.9.

$$c = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

gdje je $\alpha-$ kut između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Budući da je

$$0 \leq \cos\alpha \leq 1$$

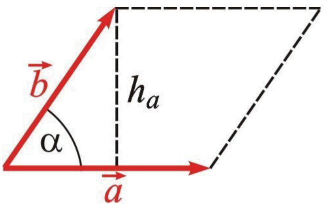
za vrijednosti kuta $0° \leq \alpha \leq 90°$ to je

$$c_{\max} = a \cdot b \cdot \cos 0 = a \cdot b,\ c_{\min} = a \cdot b \cdot \cos 90 = 0$$

Problem 1.2.4 *Koji uvjet mora biti zadovoljen da intezitet vektorskog produkta $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ bude minimalan, a koji da bude maksimalan?*

Odgovor:
Na osnovu definicije 1.1.16 intezitet vektorskog produkta dvaju vektora
$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednak je

$$c = \left| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right| = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$



Slika 1.10.

odakle vrijedi

$$c_{\max} = a \cdot (h_a)_{\max} = a \cdot b$$

jer je $(h_a)_{\max} = b$ za kut $\alpha = 90°$ i

$$c_{\min} = a \cdot (h_a)_{\min} = 0$$

gdje je $(h_a)_{\min} = 0$ za kut $\alpha = 0°$.

Problem se može riješiti i preko trigonometrijskih funkcija

$$c = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

gdje je

$$0 \leq \sin\alpha \leq 1$$

za $0° \leq \alpha \leq 90°$. Odavde slijedi

$$\begin{aligned} c_{\max} &= a \cdot b \cdot \sin 90 = a \cdot b \\ c_{\min} &= a \cdot b \cdot \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

Problem 1.2.5 *Kakav međusobni položaj moraju zauzimati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ da bi brojna vrijednost skalarnog produkta tih vektora bila jednaka intezitetu vektorskog produkta tih vektora?*

Odgovor:

Traženi uvjet je

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Prema definiciji skalarnog i vektorskog produkta slijedi

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a \cdot b \cdot \cos\alpha \\ \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| &= a \cdot b \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

traženi uvjet daje

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot \cos\alpha &= a \cdot b \cdot \sin\alpha \\ \sin\alpha &= \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \end{aligned}$$

odakle sređivanjem izraza dobivamo

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha \\ 2\sin^2\alpha &= 1 \\ \sin^2\alpha &= \frac{1}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

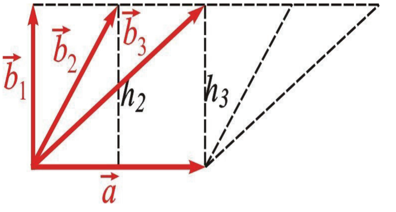
Problem 1.2.6 *Za vektore prikazane na slici 1.11. pokažite da vrijedi jednakost:*

$$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_1\right| = \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_2\right| = \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_3\right|$$

Odgovor:

Na osnovu definicije vektorskog produkta dva vektora, intezitet rezultantnog vektora odgovara površini paralelograma kojeg čine vektori. Tako vrijedi

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_1\right| &= a\cdot b_1 = P_1 \\ \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_2\right| &= a\cdot h_2 = P_2 \\ \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_3\right| &= a\cdot h_3 = P_3 \end{aligned}$$



Slika 1.11.

Na osnovu slike 1.11. vidimo da je $b_1 = h_2 = h_3$ pa slijedi $P_1 = P_2 = P_3$ odnosno

$$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_1\right| = \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_2\right| = \left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}_3\right|$$

1.3 Primjeri

Primjer 1.3.1 *Odredite koje su skalarne, a koje vektorske fizikalne veličine?*

a) težina	b) specifična toplina	c) gustoća
d) volumen	e) brzina	f) sila
g) udaljenost	h) energija	i) moment sile

Rješenje:

a) vektor	b) skalar	c) skalar
d) skalar	e) vektor	f) vektor
g) skalar	h) skalar	i) vektor

Primjer 1.3.2 *Neka su vektori* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *zadani izrazima:* $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. *Pronađite sljedeće intezitete vektora:*

a) $|\overrightarrow{c}|$,

b) $\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right|$,

c) $\left|2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{c}\right|$.

Rješenje:

a) Koristeći relaciju (1.1.8) intezitet vektora je

$$|\overrightarrow{c}| = \left|-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

b) Prvo zbrojimo vektore, a zatim njihovom zbroju izračunamo intezitet

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} &= \left(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) + \left(2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}\right) \\ &\quad + \left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) \\ &= 6\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right| = \left|6\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}\right| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{13}$$

c) Pomnožimo vektore skalarom i zbrojimo ih, a onda mu izračunamo intezitet

$$\begin{aligned}
2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c} &= 2\left(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) - 3\left(2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}\right) \\
&\quad -5\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) \\
&= -5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}\right| &= \left|-5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right| \\
&= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{30}
\end{aligned}$$

Primjer 1.3.3 *Vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *i* $\vec{d}$ *zadani su pomoću izraza:*

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\
\vec{b} &= \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \\
\vec{c} &= -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \\
\vec{d} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}
\end{aligned}$$

Pronađite skalare a, b i c tako da vrijedi: $\vec{d} = a \cdot \vec{a} + b \cdot \vec{b} + c \cdot \vec{c}$ *te izrazite vektor* $\vec{d}$ *preko vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$*?*

Rješenje:

Koristeći zadane vektore dobivamo

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c} \\
\vec{d} &= a\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) + b\left(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\right) + c\left(-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\right) \\
&= 2a\vec{i} - a\vec{j} + a\vec{k} + b\vec{i} + 3b\vec{j} - 2b\vec{k} - 2c\vec{i} + c\vec{j} - 3c\vec{k} \\
&= (2a + b - 2c)\vec{i} + (-a + 3b + c)\vec{j} + (a - 2b - 3c)\vec{k} \\
&= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}
\end{aligned}$$

Dva vektora su jednaka ako su im jednake sve komponente, tj. mora vrijediti:

$$\begin{aligned}
(2a + b - 2c) &= 3 \\
(-a + 3b + c) &= 2 \\
(a - 2b - 3c) &= 5
\end{aligned}$$

Ovo je sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznate veličine. Rješenje sustava je

$$a = -2,\ b = 1,\ c = -3$$

pa je tražena kombinacija $\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + -3\overrightarrow{c}$.

Primjer 1.3.4 *Pronađite jedinični vektor u smjeru rezultante dvaju vektora* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

Rješenje:
Rezultanta dvaju vektora je zbroj tih vektora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R} &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{R} &= 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} + \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{R} &= 3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

intezitet rezultante je

$$\left|\overrightarrow{R}\right| = \left|3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7$$

Na osnovu def. 1.1.11 vrijedi $\overrightarrow{R}_0 = \frac{\overrightarrow{R}}{\left|\overrightarrow{R}\right|}$ pa je

$$\overrightarrow{R}_0 = \frac{3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}}{7} = \frac{3}{7}\overrightarrow{i} + \frac{6}{7}\overrightarrow{j} - \frac{2}{7}\overrightarrow{k}$$

Da bismo se uvjerili u točnost rezultata izračunajmo intezitet vektoru $\overrightarrow{R}_0$:

$$\left|\overrightarrow{R}_0\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = 1$$

Primjer 1.3.5 *Odredite kutove koje vektor* $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ *zatvara sa pozitivnim smjerovima koordinatnih osi i pokažite da vrijedi jednakost kosinusa kuteva* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Rješenje:

Koristeći definiciju skalarnog produkta vektora $\overrightarrow{r}$ sa jediničnim vektorima koordinatnih osi dobivamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{i} &= \left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)\cdot\overrightarrow{i}=x\\
\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j} &= \left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)\cdot\overrightarrow{j}=y\\
\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{k} &= \left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)\cdot\overrightarrow{k}=z
\end{aligned}$$

pa vrijedi

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$$

odnosno

$$\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|}$$

pa su kutovi

$$\begin{aligned}
\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{r},\overrightarrow{i}\right) &= \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{r}|\left|\overrightarrow{i}\right|}=\frac{x}{r\cdot 1}=\frac{x}{r}\\
\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{r},\overrightarrow{j}\right) &= \cos\beta=\frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{j}}{|\overrightarrow{r}|\left|\overrightarrow{j}\right|}=\frac{y}{r\cdot 1}=\frac{y}{r}\\
\cos\left(\measuredangle\overrightarrow{r},\overrightarrow{k}\right) &= \cos\gamma=\frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{k}}{|\overrightarrow{r}|\left|\overrightarrow{k}\right|}=\frac{z}{r\cdot 1}=\frac{z}{r}
\end{aligned}$$

gdje je intezitet vektora $\overrightarrow{r}$ jednak

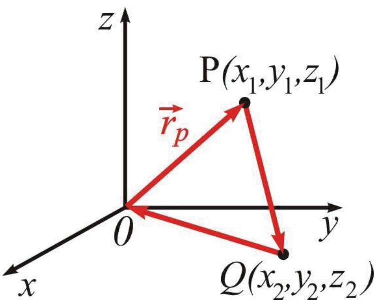
$$|\overrightarrow{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma &= \left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2\\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1
\end{aligned}$$

Primjer 1.3.6 *Odredite vektor $\overrightarrow{PQ}$ kojemu je zadana početna točka $P(x_1,y_1,z_1)$ i krajnja točka $Q(x_2,y_2,z_2)$, a zatim mu izračunajte iznos.*

Rješenje:



Slika 1.12.

Vektor položaja točki P i Q su:

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\\ \vec{r}_Q &= x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\end{aligned}$$

Mora vrijediti

$$\vec{r}_P+\overrightarrow{PQ}=\vec{r}_Q$$

odnosno

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}_Q-\vec{r}_P$$

pa je vektor $\overrightarrow{PQ}$ jednak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)-\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\\ &= (x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}\end{aligned}$$

odnosno njegov intezitet

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

što je zapravo udaljenost između točaka P i Q.

Primjer 1.3.7 *Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori. Pronađite vrijednosti x, y tako da vrijedi $3\vec{A}=2\vec{B}$, ako su zadani vektori*

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (x+4y)\,\vec{a}+(2x+y+1)\,\vec{b}\\ \vec{B} &= (y-2x+2)\,\vec{a}+(2x-3y-1)\,\vec{b}\end{aligned}$$

Rješenje:
Koristeći zadani uvjet i vrijednosti vektora imamo

$$\begin{aligned}3\vec{A} &= 3\left[(x+4y)\,\vec{a}+(2x+y+1)\,\vec{b}\right]\\ &= 3x\vec{a}+12y\vec{a}+6x\vec{b}+3y\vec{b}+3\vec{b}\\ &= (3x+12y)\,\vec{a}+(6x+3y+3)\,\vec{b}\\ 2\vec{B} &= 2\left[(y-2x+2)\,\vec{a}+(2x-3y-1)\,\vec{b}\right]\\ &= 2y\vec{a}-4x\vec{a}+4\vec{a}+4x\vec{b}-6y\vec{b}-2\vec{b}\\ &= (2y-4x+4)\,\vec{a}+(4x-6y-2)\,\vec{b}\end{aligned}$$

odnosno

$$3A - 2B = (7x + 10y - 4)\overrightarrow{a} + (2x + 9y + 5)\overrightarrow{b} = 0$$

dakle, mora vrijediti sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} (7x + 10y - 4) &= 0 \\ (2x + 9y + 5) &= 0 \end{aligned}$$

čije rješenje je $x = 2;\ y = -1$.

Primjer 1.3.8 *Pronađite kut između vektora* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *i vektora* $\overrightarrow{b} = 6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

Rješenje:

Koristeći definiciju skalarnog produkta vektora i inteziteta vektora (definicija 1.1.12) vrijedi $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab\cos\alpha$, i $|a| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}$ pa je

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3 \\ b &= \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7 \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{a \cdot b} = \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21} \\ \alpha &= \arccos\frac{4}{21} = 1,3791 \end{aligned}$$

Primjer 1.3.9 *Zadani su vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$. *Odredite vrijednost parametra* α *tako da vektori* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ *budu okomiti.*

Rješenje:

Da bi dva vektora bila okomita jedan na drugi mora biti zadovoljen uvjet $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab\cos\alpha = 0$ jer je $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \left(2\overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) \cdot \left(4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right) \\ &= (2)(4) + (\alpha)(-2) + (1)(-2) \\ &= 8 - 2\alpha - 2 = 6 - 2\alpha = 0 \ \rightarrow\ \alpha = 3 \end{aligned}$$

Primjer 1.3.10 *Odredite jedinični vektor okomit na ravninu koja je razapeta vektorima* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Rješenje:

Zadatak možemo riješiti na dva načina. Prvi način je da napravimo vektorski produkt vektora koji razapinju ravninu. Na taj način dobivamo novi vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ koji je okomit na te vektore, a time i na ravninu koju razapinju.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{c} &= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 5\left(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

pa je jedninični vektor jednak

$$\overrightarrow{c}_0 = \frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|} = \frac{5\left(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right)}{\left|5\left(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right)\right|} = \frac{3}{7}\overrightarrow{i} - \frac{2}{7}\overrightarrow{j} + \frac{6}{7}\overrightarrow{k}$$

Drugi način: pretpostavimo da je vektor $\overrightarrow{c} = c_x\overrightarrow{i} + c_y\overrightarrow{j} + c_z\overrightarrow{k}$ okomit na zadanu ravninu. Kako je okomit na ravninu, mora biti okomit i na vektore $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ koji pripadaju toj ravnini. Dakle, mora vrijediti:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} &= 2c_x - 6c_y - 3c_z = 0 \ \text{ ili } 2c_x - 6c_y = 3c_z \\
\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} &= 4c_x + 3c_y - c_z = 0 \quad \text{ ili } 4c_x + 3c_y = c_z
\end{aligned}$$

Rješavanjem prethodnih jednadžbi imamo parametarsko rješenje, gdje je c_z uzet za parametar

$$c_x = \frac{1}{2}c_z; \quad c_y = -\frac{1}{3}c_z$$

Onda je vektor $\overrightarrow{c}$ jednak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{c} &= c_x\overrightarrow{i} + c_y\overrightarrow{j} + c_z\overrightarrow{k} = \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}c_z\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}c_z\overrightarrow{j} + c_z\overrightarrow{k} \\
&= c_z\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

odnosno jedinični vektor u tom smjeru je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{c}_0 &= \frac{\overrightarrow{c}}{c} = \frac{c_z\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)}{\pm\sqrt{c_z^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2\right]}} \\
&= \pm\frac{c_z\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)}{c_z\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1}} = \pm\frac{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)}{\frac{7}{6}} \\
&= \pm\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{i} - \frac{2}{7}\overrightarrow{j} + \frac{6}{7}\overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

Primjer 1.3.11 *Ako je* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, *pronađite vrijednosti slijedećih vektora:*

a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ i

b) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)$.

Rješenje:
a) Koristeći definiciju vektorskog produkta 1.1.16 imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\
&= 10\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

b) Prvo pronađimo

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) &= \left(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) + \left(\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right) \\
&= 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\
\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) &= \left(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) - \left(\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right) \\
&= \overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},
\end{aligned}$$

a zatim vektorski pomnožimo

$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}=-20\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}-22\overrightarrow{k}$$

Primjer 1.3.12 *Pokažite da su sljedeći vektori:* $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{c}=-3\overrightarrow{i}+12\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}$ *komplanarni i rastavite vektor* $\overrightarrow{c}$ *po vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$.

Rješenje:

Tri vektora su komplanarna ako postoji njihova međusobna zavisnost, tj. jedan od vektora možemo prikazati kao linearnu kombinaciju preostala dva (ti vektori leže u istoj ravnini). Što znači da njihov mješoviti produkt mora biti jednak nuli.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} &= 0\\ \left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c} &= \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

Prikažimo sada vektor $\overrightarrow{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c} &= m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}\\ -3\overrightarrow{i}+12\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k} &= m\left(-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right)+n\left(2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}\right)\\ -3\overrightarrow{i}+12\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k} &= (-m+2n)\overrightarrow{i}+(3m-3n)\overrightarrow{j}+(2m-4n)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

odakle slijedi sustav od tri jednadžbe sa dvije nepoznanice

$$\begin{aligned}(-m+2n) &= -3\\ (3m-3n) &= 12\\ (2m-4n) &= 6\end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je jedinstveno i glasi:

$$\begin{aligned}m &= 5\\ n &= 1\end{aligned}$$

pa vektor $\overrightarrow{c}$ možemo napisati kao kombinaciju $\overrightarrow{c}=5\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

Primjer 1.3.13 *Konstruirajte piramidu kojoj su vrhovi* $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$ *i* $C(1,2,4)$ *te izračunajte njen volumen, površinu strane* ABC *i visinu piramide spuštenu na tu stranu.*

Rješenje:
Piramida je određena vektorima $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, koji su jednaki

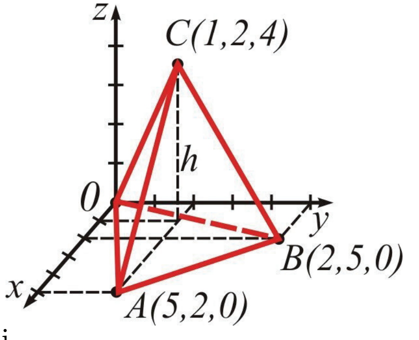
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{OB} &= 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

i definiraju paralelopiped volumena

$$\begin{aligned} V &= \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot 20 - 2 \cdot 8 = 84 \end{aligned}$$

volumen piramide jednak je $V_P = \frac{1}{6} \cdot V = 14$ kubnih jedinica. Da bismo izračunali površinu stranice ABC trebamo pronaći vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Oni su

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{AC} &= -4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k} \end{aligned}$$



Slika 1.13.

Apsolutna vrijednost vektorskog umnoška jednaka je dvostrukoj površini traženog trokuta pa je površina trokuta jednaka bazi piramide B

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k} \\ \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

pa je tražena površina

$$P\left(\Delta ABC\right) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Volumen piramide je dan izrazom

$$V_P = \frac{B \cdot h}{3}$$

odakle je visina piramide jednaka

$$h = \frac{3 \cdot V_P}{B} = \frac{3 \cdot V_P}{P\left(\Delta ABC\right)} = \frac{3 \cdot 14}{6\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

1.4 Zadatci

Problem 1.4.1 *Riješite* $\left(2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\right)\cdot\overrightarrow{j}+\left(\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}\right)\cdot\overrightarrow{k}+\left(\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{k}\right)^2$.

Rezultat: **2**.

Problem 1.4.2 *Na materijalnu točku djeluju tri sile u horizontalnoj ravnini:* $F_1 = 2\,\mathrm{N}$ *prema sjeveru,* $F_2 = 2.8\,\mathrm{N}$ *prema jugoistoku i* $F_3 = 1.5\,\mathrm{N}$ *prema zapadu. Izračunajte rezultantu tih sila grafički i računski.*

Rezultat: $\overrightarrow{F} = \left(2.47\overrightarrow{i} - 1.97\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}$.

Problem 1.4.3 *Pronađite iznos rezultante četiriju komplanarnih sila koje djeluju u točki O, ako svaka sila ima iznos od* $10\,\mathrm{N}$*, a kut između dviju susjednih sila iznosi* $45°$.

Rezultat: $R = 10\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\mathrm{N} = 26.131\,\mathrm{N}$.

Problem 1.4.4 *Zadane su sljedeće sile* $\overrightarrow{F}_1 = \left(10\overrightarrow{i}+10\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}$, $\overrightarrow{F}_2 = \left(-10\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}$, $\overrightarrow{F}_3 = \left(-4\overrightarrow{i}\right)\,\mathrm{N}$ *i* $\overrightarrow{F}_4 = \left(-10\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}$. *Odredite iznos i smjer rezultantne sile.*

Rezultat: $\overrightarrow{R} = \left(-4\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{N}$, $R = 6.4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 231.3°$.

Problem 1.4.5 *Odredite kut između vektora* $\overrightarrow{a} = \left(3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$ *i vektora* $\overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right)$.

Rezultat: $\alpha = 104.1°$.

Problem 1.4.6 *Izrazite kut* δ *među vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{a}'$ *pomoću kutova koje ti vektori zatvaraju s koordinatnim osima* x, y *i* z.

Rezultat: $\cos\delta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$.

Problem 1.4.7 *Zadani su vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$. *Pronađite kut između vektora*
$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m}+4\overrightarrow{n}$ *i* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m}-\overrightarrow{n}$, *ako su* $\overrightarrow{m}$ *i* $\overrightarrow{n}$ *jedinični vektori koji međusobno zatvaraju kut od* $120°$.

Rezultat: 120°.

Problem 1.4.8 *Konstruirajte paralelogram razapet vektorima* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$ *te izračunajte njegovu površinu i visinu.*

Rezultat: $P = \sqrt{21}$, $h = \sqrt{4.2}$.

Problem 1.4.9 *Riješite se zagrada i pojednostavite izraze:*

1. $\overrightarrow{i} \times \left(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) - \overrightarrow{j} \times \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right) + \overrightarrow{k} \times \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \times \overrightarrow{c} + \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \times \overrightarrow{b} + \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right) \times \overrightarrow{a}$;
3. $\left(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$;
4. $2\overrightarrow{i} \cdot \left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}\right) + 3\overrightarrow{j} \cdot \left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}\right) + 4\overrightarrow{k} \cdot \left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}\right)$;

Rezultat: 1. $2\left(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{i}\right)$, 2. $2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$, 3. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$, 4. 3.

Problem 1.4.10 *Odredite površinu paralelograma razapetog vektorima* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$ *i* $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$, *gdje su* $\overrightarrow{m}$ *i* $\overrightarrow{n}$ *jedinični vektori koji međusobno zatvaraju kut od* 30°.

Rezultat: 1.5.

Problem 1.4.11 *Konstruirajte paralelopiped razapet vektorima* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = -3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ *te izračunajte njegov volumen. Hoće li sustav vektora (baza)* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *biti lijevi ili desni?*

Rezultat: **(**$V = 17$, lijevi**)**.

Problem 1.4.12 *Zadana su tri vektora* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. *Izračunajte* $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$ *i* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$.

Rezultat: $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = -16$; $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = 15$.

Problem 1.4.13 *Zadana su tri vektora* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *i* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$. *Izračunajte* $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$ *i* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$.

Rezultat: $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = -3\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 15\overrightarrow{k}$; $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = 0$.

Problem 1.4.14 *Pokažite da su vektori* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ *i* $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ *komplanarni vektori i pronađite njihovu međusobnu linearnu ovisnost.*

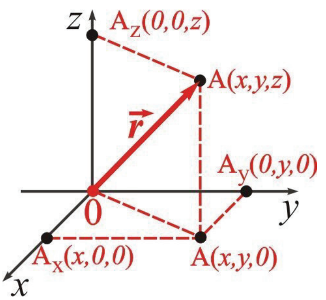
Rezultat: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$.

Poglavlje 2

KINEMATIKA ČESTICE

2.1 Osnovni pojmovi i definicije

Klasična mehanika je znanost koja proučava geometrijska svojstva gibanja materijalnih tijela u ovisnosti o vremenu i o uzrocima tih gibanja. Ona se dijeli na: znanost o gibanju ili kinematiku, znanost o silama ili uzrocima gibanja dinamiku te znanost o ravnoteži, statiku, koja je granični slučaj dinamike.



Slika 2.1.

U općenitom smislu fizika kao znanost proučava neki događaj. Svaki događaj određen je u prostorno-vremenskom kontinuumu s četiri broja $D(x, y, z, t)$. Kažemo da svaki događaj ima određeni položaj. Položaj u prostoru određen je s tri broja ili podatka jer je prostor trodimenzionalan. Položaj u vremenu određen je jednim brojem.

Najčešći način određenja položaja je dan u Descartesovom pravokutnom koordinatnom sustavu. U tom prostoru položaj točke A određen je s tri uređena broja $A(x, y, z)$. Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju da je vektor veličina određena s tri podatka pa se položaj u prostoru može odrediti vektorskom veličinom koju nazivamo vektor položaja: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r}$

Definicija 2.1.1 *Vektor položaja je vektor koji ima početak u koordi-*

natnom
početku (u ishodištu koordinatnog sustava), a kraj u točki čiji se položaj određuje.

Definicija 2.1.2 *Mehaničko gibanje predstavlja promjenu vektora položaja promatranog tijela u nekom vremenskom intervalu.*

Ovo je jedna od mogućih definicija mehaničkog gibanja. Ono što treba
naglasiti jest da je mehaničko gibanje *relacijski proces*. Da bismo govorili o gibanju moramo znati što se giba (tijelo u gibanju) i u odnosu na što se giba (reperno tijelo ili točka).

Definicija 2.1.3 *Skup točaka položaja tijela (materijalne točke) tijekom gibanja naziva se putanja.*

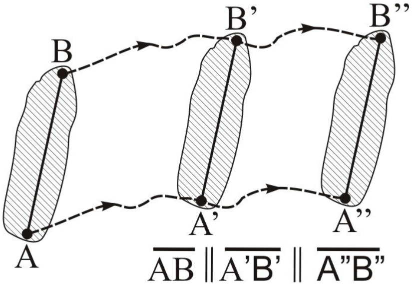
Posljedica: Sukcesivni položaji mogu se odrediti u bilo kom malom vremenskom intervalu. Ta mogućnost slijedi iz jednog bitnog svojstva mehaničkog gibanja, a to je neprekidnost. Svako mehaničko gibanje čvrstog tijela može se razložiti na dva osnovna oblika gibanja; translacijsko i rotacijsko.

Definicija 2.1.4 *Tijelo se giba translacijski (slika 2.2.) ako spojnica bilo koje dvije točke na tijelu tijekom gibanja ostaju same sebi paralelne.*

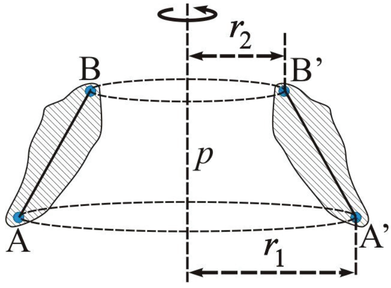
Posljedica: Sve točke tijela opisuju istu putanju, što znači da će svaka točka pri translaciji imati isto gibanje. Pri ovakvom gibanju možemo zanemariti oblik tijela i uzeti jednu točku (materijalna točka) kao predstavnika cijelog tijela. Jednadžbe koje budu opisivale gibanje materijalne točke važit će za čitavo tijelo pri translaciji.

Definicija 2.1.5 *Tijelo se giba rotacijski (slika 2.3.) ako svaka točka tog tijela opisuje kružnice čiji centri leže na jednom pravcu kojeg nazivamo:* os rotacije*.*

Posljedica: Različite točke opisuju kružnice različitih polumjera pa u istom vremenskom intervalu opisuju različite dužine putanje. Odavde slijedi da pri razmatranju ovog gibanja ne možemo zanemariti oblik tijela.



Slika 2.2.



Slika 2.3.

Kinematika translacijskog gibanja

S obzirom na oblik putanje gibanje možemo podijeliti na:

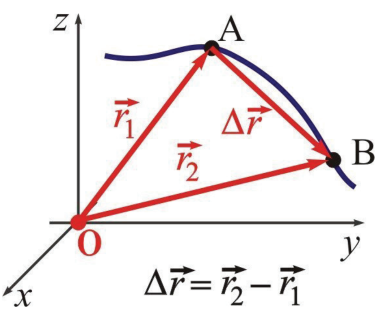
a) pravocrtno

b) krivocrtno

c) kružno gibanje – kao specijalni slučaj krivocrtnog gibanja.

Već smo u definiciji (2.1.2) rekli da je mehaničko gibanje povezano s promjenom vektora položaja. Promjenu vektora položaja možemo opisati pomoću vektora pomaka $\Delta\overrightarrow{r}$.

Definicija 2.1.6 *Vektor pomaka je vektor koji ima početak u početnoj točki pomaka, a kraj u krajnjoj točki pomaka.*



Slika 2.4.

Posljedica: Na osnovu slike (2.4.) vidimo da je vektor pomaka jednak razlici između vektora položaja krajnje točke ($\overrightarrow{r}_2$) i vektora položaja početne točke ($\overrightarrow{r}_1$) :

$$\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 \tag{2.1.1}$$

Promjena vektora položaja prilikom gibanja može se obaviti u različitim vremenskim intervalima. Fizikalna veličina koja opisuje promjenu položaja u nekom vremenskom intervalu naziva se brzina gibanja $\overrightarrow{v}$.

Definicija 2.1.7 *Brzina $\overrightarrow{v}$ mehaničkog gibanja predstavlja količnik vektora pomaka $\Delta\overrightarrow{r}$ u nekom vremenskom intervalu Δt;*

$$\overrightarrow{v} \stackrel{def.}{=} \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t} \tag{2.1.2}$$

Jednadžba (2.1.2) je dana u obliku kvalitativne definicije jer kvantitativni omjer mora zadovoljiti određene dodatne uvjete o kojima ćemo govoriti kasnije. Na primjer, na osnovu slike (2.4.) vidimo da kod krivocrtnog gibanja intenzitet vektora pomaka $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$ ne odgovara odsječku putanje $\overset{\frown}{AB}$, što znači da u ovom slučaju ne možemo koristiti kvantitativni odnos vektora pomaka sa bilo kojim vremenskim intervalom za određenje brzine. U slučaju pravocrtnog gibanja vektor pomaka bit će jednak prijeđenom putu.

Posljedica: Iz relacije (2.1.2) vidimo da je brzina vektorska veličina i ima smjer gibanja tj. promjene položaja.

Pravocrtno gibanje materijalne točke

Definicija 2.1.8 *Mehaničko gibanje kod kojega se u bilo kojem vremenskom intervalu vektor pomaka poklapa sa putanjom materijalne točke naziva se pravocrtno gibanje.*

Posljedica: Sve vektorske veličine koje opisuju ovakvo gibanje ležat će na istom pravcu, tj. bit će kolinerani, tako da operacije s vektorima mogu biti svedene na operacije sa skalarima tj. intenzitetima tih vektora gdje će operacija zbrajanja i oduzimanja biti određena smjerom vektora.

S obzirom na brzinu (odnosno na promjenjivost inteziteta brzine) pravocrtno gibanje se može podijeliti na:

a) jednoliko gibanje po pravcu

b) jednoliko promjenjivo gibanje po pravcu

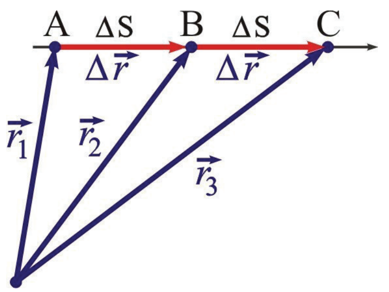
c) nejednoliko promjenjivo gibanje po pravcu.

a) Jednoliko gibanje po pravcu

Definicija 2.1.9 *Jednoliko gibanje po pravcu imamo onda kada materijalna točka u jednakim vremenskim razmacima prevaljuje, uvijek u istom smjeru, jednake intenzitete vektora pomaka odnosno jednake putove.*

Posljedica: Na osnovu definicije brzine slijedi da je kod jednolikog pravocrtnog gibanja zadovoljena kvantitativna jednakost:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.1.3}$$



Slika 2.5.

Relacija (2.1.3) je jednadžba gibanja kod jednolikoga pravocrtnog gibanja. Kako su vektor brzine i vektor pomaka kolinearni (slika 2.5.) ova se jednadžba može pisati i u skalarnom obliku.

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{2.1.4}$$

Kod jednolikog gibanja po pravcu vrijedi

$$\Delta r = \Delta s \tag{2.1.5}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ ili jednostavnije } v = \frac{s}{t} \tag{2.1.6}$$

Također na osnovu definicije jednolikog pravocrtnog gibanja kako je odnos prevaljenih putova proporcionalna protoku vremena tj. iz relacije (2.1.3) slijedi;

$$\frac{\Delta r_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta r_2}{\Delta t_2} = const. \tag{2.1.7}$$

da je brzina pri ovom gibanju konstantna. Dakle, kod jednolikog pravocrtnog gibanja vektor brzine materijalne točke je uvijek stalan.

$$\vec{v} = const. \tag{2.1.8}$$

Iz definicijske jednadžbe dobivamo fizikalnu dimenziju brzine, odnosno jedinicu za brzinu

$$v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \frac{s\,[\mathrm{m}]}{t\,[\mathrm{s}]} \tag{2.1.9}$$

b) Jednoliko promjenjivo gibanje po pravcu

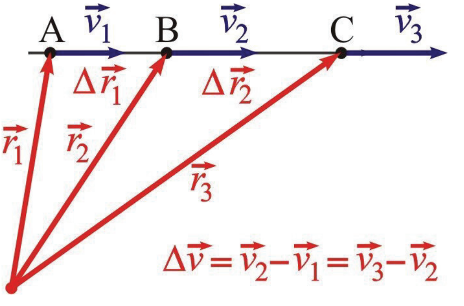
Postoje slučajevi, kao što to pokazuje primjer na slici (2.6.), da se prilikom pravocrtnog gibanja tijela mijenja brzina tijekom gibanja. Brzina se može povećavati ili smanjivati. Fizičku veličinu koja opisuje tu promjenu nazivamo akceleracija (ubrzanje) ili retardacija (usporenje, deceleracija).

Definicija 2.1.10 *Akceleracija mehaničkog gibanja predstavlja količnik promjene vektora brzine gibanja* $\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1$ *u nekom vremenskom intervalu* $\Delta t = t_2 - t_1$*;*

$$\overrightarrow{a} \overset{def.}{=} \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{2.1.10}$$

Navedena relacija (2.1.10) dana je samo kao kvalitativna definicija jer znak jednakosti vrijedi pod određenim uvjetima.

Posljedica: Iz relacije (2.1.10) vidimo da će ubrzanje biti vektorska veličina čiji je smjer određen smjerom promjene brzine. Kada je promjena pozitivna imat ćemo ubrzanje, a ako je negativna usporenje.



Slika 2.6.

Postoje specijalni slučajevi kod promjenjivog pravocrtnog gibanja, a to je kada u jednakim vremenskim intervalima imamo jednaku promjenu brzine. Neka je za vremenski interval Δt_1 promjena Δv_1 i za Δt_2 promjena Δv_2 i tako dalje i ako je

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = ... = const. \tag{2.1.11}$$

onda ovakvo gibanje zovemo jednoliko promjenjivim pravocrtnim gibanjem. Prema definiciji ubrzanja za ovo gibanje važi jednakost

$$\overrightarrow{a} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = const. \tag{2.1.12}$$

Definicija 2.1.11 *Za tijelo kažemo da se giba jednoliko promjenjivo pravocrtno ako je pri tom gibanju vektor ubrzanja (usporenja) stalan ili konstantan.*

Posljedica: Na osnovu navedenih podataka o brzini i ubrzanju možemo dati definiciju ovog gibanja na slijedeći način:

$$\overrightarrow{v} \neq const.; \quad \overrightarrow{a} = const. \tag{2.1.13}$$

Fizikalna dimenzija za ubrzanje je

$$a\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = \frac{v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}{t\,[\mathrm{s}]} \tag{2.1.14}$$

Kod ovog gibanja možemo postaviti jednakost $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ jer je promjena u bilo kom vremenskom intervalu konstantna.

Kako se tijekom gibanja mijenja brzina onda se kod takvih gibanja definira srednja brzina koja matematički predstavlja aritmetičku sredinu svih brzina na prevaljenom putu:

$$v_{sr} = \frac{v_1 + v_2 + ...v_n}{n} = \frac{\sum_i v_i}{n} \text{ ili } v_{sr} = \frac{s}{t} \tag{2.1.15}$$

gdje je s – prijeđeni put u vremenu t. Iz ove dvije jednadžbe izvodi se srednja brzina nekog promjenjivog gibanja.

Definicija 2.1.12 *Srednja brzina nekog promjenjivog gibanja je ona brzina jednolikog pravocrtnog gibanja kojom bi se tijelo trebalo gibati da isti put prevali za isto vrijeme kao i pri konstantnom gibanju.*

Posljedica: Kako se prilikom bilo kojeg promjenjivog gibanja pa i ovog specijalnog slučaja mijenjanja brzina, ne možemo govoriti o brzini na prevaljenom putu, nego samo o trenutnoj brzini.

Definicija 2.1.13 *Trenutna brzina je brzina u beskonačno malom vremenskom intervalu ili matematički*

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} \tag{2.1.16}$$

Posljedica: Jednadžba (2.1.16) u matematičkom obliku predstavlja prvi izvod ili diferencijal.

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \tag{2.1.17}$$

Ova jednadžba predstavlja opći slučaj definicije trenutne brzine.

Definicija 2.1.14 *Brzina materijalne točke je vremenska derivacija vektora puta ili vektora pomaka po vremenu*

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} \tag{2.1.18}$$

Koristeći navedene relacije i definiciju trenutne brzine možemo izvesti relacije za trenutnu brzinu $v(t)$ i prijeđen put $s(t)$ kod jednolikog promjenjivog
pravocrtnog gibanja.

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} \tag{2.1.19}$$

$$\overrightarrow{a} = const. \tag{2.1.20}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} \tag{2.1.21}$$

(Napomenimo da se jednadžbe mogu pisati u skalarnom obliku jer su vektori kolinearni.)

Pretpostavimo da u početnom trenutku $t_1 = 0$ postoji neka početna brzina $v_1 = v_0$, a nakon nekog vremena $t_2 = t$ materijalna točka nakon ubrzanja dostiže brzinu $v_2 = v$. Na osnovu jednadžbe (2.1.10) imamo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t} \Big/ \cdot t \tag{2.1.22}$$

$$at = v - v_0 \Longrightarrow v = v_0 \pm at \tag{2.1.23}$$

Dobivena relacija (2.1.23) je izraz za trenutnu brzinu jednolikog promjenjivog pravocrtnog gibanja s početnom brzinom v_0. Predznak (+) imamo kod ubrzanog, a (−) kod usporenog gibanja. Na osnovu definicije trenutne brzine (2.1.19) imamo:

$$v = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow ds = v \cdot dt \tag{2.1.24}$$

Iz (2.1.23) i (2.1.24) dobivamo:

$$ds = (v_0 \pm at)\, dt \Big/ \int \tag{2.1.25}$$

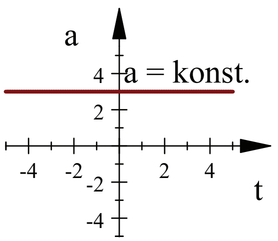
$$\int_0^s ds = \int_0^t v_0 dt \pm \int_0^t at \cdot dt \Longrightarrow s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2 \tag{2.1.26}$$

Eliminacijom vremena i supstitucijom (2.1.23) u (2.1.26) dobivamo relaciju između trenutne brzine i prijeđenog puta

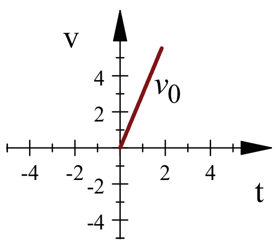
$$v = \sqrt{v_0^2 \pm 2as} \tag{2.1.27}$$

Jednadžbe (2.1.23),(2.1.26) i (2.1.27) predstavljaju relacije za jednoliko promjenjivo pravocrtno gibanje.

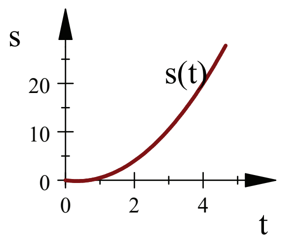
Sve ovisnosti se mogu predočiti i u slijedećim grafikonima.



a(t) dijagram



v(t) dijagram



s(t) dijagram

c) Nejednoliko promjenjivo gibanje po pravcu

Definicija 2.1.15 *Pravocrtno gibanje materijalne točke pri kome se ne mijenja samo brzina već i ubrzanje, nazivamo nejednoliko promjenjivo pravocrtno gibanje.*

$$\overrightarrow{v} \neq const. \tag{2.1.28}$$
$$\overrightarrow{a} \neq const. \tag{2.1.29}$$

Pošto se pri ovom gibanju mijenja ubrzanje moramo, kao što je to bio slučaj s trenutnom brzinom u prethodnom gibanju, uvesti pojam trenutnog ubrzanja.

Definicija 2.1.16 *Trenutno ubrzanje je ubrzanje u beskonačno malom vremenskom intervalu ili matematički*

$$\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \to} {}_0 \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} \tag{2.1.30}$$

Posljedica: Jednadžba (2.1.30) predstavlja ustvari definiciju prvog izvoda brzine po vremenu

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{2.1.31}$$

Definicija 2.1.17 *Ubrzanje je derivacija vektora brzine po vremenu* $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$.

Ubrzanje možemo prikazati i preko druge derivacije prevaljenog puta (s) po vremenu (t). Kako je $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{s}}{st}$ onda supstitucijom u jednadžbi (2.1.31) imamo:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{s}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{s}}{dt^2} \text{ ili } \overrightarrow{a} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \tag{2.1.32}$$

I na kraju možemo naglasiti da jednadžbe (2.1.18), (2.1.31) odnosno (2.1.32) predstavljaju opće jednadžbe za brzinu i ubrzanje iz kojih se mogu izvesti svi prethodni navedeni slučajevi gibanja.

Jednoliko pravocrtno:

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t 0 \cdot dt = konst. = v_0$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = v_0 t + s_0$$

Jednoliko promjenjivo pravocrtno:

$$a(t) = konst. = a$$

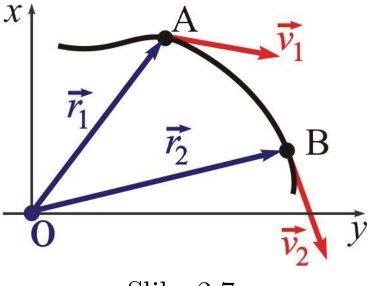
$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t a dt = at + v_0$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (at + v_0)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

Krivocrtno gibanje materijalne točke

Već smo dali opće definicije trenutne brzine i ubrzanja. Ove opće definicije dane u vektorskom obliku moraju odgovarati za sva gibanja pa i za krivocrtno. Promatrajmo definiciju trenutne brzine

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{s}(t)}{dt}$$



Slika 2.7.

Posljedica: Iz navedene relacije vidimo da ona predstavlja prvi izvod vektora (r) položaja odnosno prevaljenog puta (s). Kako je u analitičkom obliku prijeđen put predstavlja jednadžbu krivulje (u našem primjeru neka parabola čiji je opći oblik $s = y = ax^2 + bx + c$), onda znamo da prva derivacija krivulje u promatranoj točki predstavlja u geometrijskom smislu jednadžbu pravca (u našem primjer $y' = 2ax + b$). Odavde slijedi da će vektor brzine ležati na tangenti u promatranoj točki putanje.

Kao što se vidi iz slike (2.7.) na različitim točkama putanje postoje različite tangente, tj. pravci koji zatvaraju različite kutove s koordinatom x, a što znači da su pripadajući vektori brzina, bez obzira na njihov intenzitet, različiti $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{v}_2$. Odavde slijedi da je svako krivocrtno gibanje promjenjivo gibanje ($\overrightarrow{v} \neq const.$).

Slaganje gibanja:

Gibanje tijela je složeno ako tijelo istovremeno izvodi dva ili više jednostavnih gibanja. Pod slaganjem (zbrajanjem) dvaju ili više gibanja nekog tijela podrazumjeva se određivanje rezultatnog gibanja.

Kako se gibanje, bilo ono jednostavno ili složeno, opisuje vektorskim veličinama, to će se određivanje rezultatnog gibanja svesti na zbrajanje vektora koji opisuju komponentna gibanja. Prilikom slaganja gibanja važi princip nezavisnosti gibanja, tj. komponentno gibanje ne mijenja svoj karakter pri zbrajanju sa ostalim gibanjima. Ovaj princip se može iskazati i na slijedeći način:

Definicija 2.1.18 *Ako tijelo vrši istovremeno dva ili više gibanja, tada je točka u koju tijelo pri tom gibanju stigne, neovisna o tome vrši li se gibanje istovremeno ili tijelo najprije izvrši samo jedno gibanje, a zatim neovisno o tom gibanju drugo gibanje u jednakim vremenskim intervalima.*

Prilikom razmatranja složenog gibanja veoma je bitno uvesti definicije apsolutnog, relativnog i prijenosnog gibanja.

- apsolutno gibanje je gibanje točke u odnosu na sustav kojeg smo uzeli kao nepokretnog,
- relativno gibanje je gibanje točke u odnosu na pokretni sustav,
- prijenosno gibanje je gibanje pokretnog koordinatnog sustava u odnosu na apsolutni koordinatni sustav.

Tako se, na primjer, slaganje brzina svodi na vektorsko zbrajanje relativnog i komponentnog gibanja

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \overrightarrow{v}_p \tag{2.1.33}$$

gdje je $\overrightarrow{v}_a-$ brzina apsolutnog gibanja točke, $\overrightarrow{v}_r-$ brzina relativnog gibanja točke i $\overrightarrow{v}_p-$ brzina prijenosnog gibanja.

Zadatci se uvjetno mogu podijeliti na dvije grupe:

a) Poznato je relativno i prijenosno gibanje točke i treba odrediti apsolutno gibanje.

b) Poznato je apsolutno i prijenosno gibanje točke i treba odrediti relativno gibanje.

Pri rješavanju ovih zadataka preporučuje se slijedeći redoslijed. Uzet ćemo primjer određivanja apsolutne brzine:

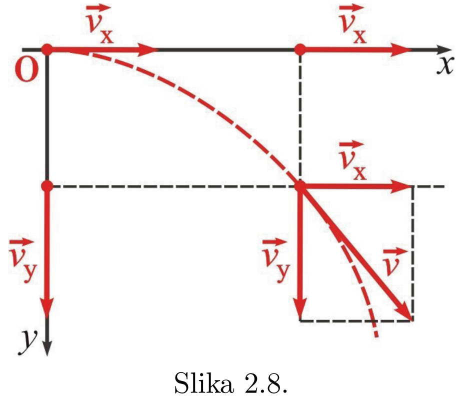
1. Razložiti gibanje u komponentna gibanja i izabrati dva koordinatna sustava: apsolutni i relativni (ovi koordinatni sustavi su zadani najčešće iz uvjeta zadatka), a zatim definirati apsolutno, relativno i prijenosno gibanje.

2. Zamisliti da je prijenosno gibanje zaustavljeno i odrediti brzinu relativnog gibanja točke (objekta), a zatim zamisliti da je relativno gibanje zaustavljeno i odrediti prijenosno gibanje točke (objekta).

3. Primjeniti pravila o slaganju vektora brzine i odrediti traženu apsolutnu brzinu točke (objekta).

Kao primjer slaganja gibanja promatrajmo dva slučaja; horizontalni i kosi hitac.

Definicija 2.1.19 *Hitac je gibanje tijela sa početnom brzinom* v_0 *u gravitacijskom polju čije je ubrzanje* g.



Slika 2.8.

Ako pravac početne brzine zatvara bilo koji kut $0 < \alpha < 90$ s horizontalom onda imamo kosi hitac, a ako je pravac početne brzine paralelan sa horizontalom onda imamo horizontalni hitac.

a) Horizontalni hitac

Složeno gibanje koje je sastavljeno (slika 2.8.) od jednoliko pravocrtnog gibanja po horizontali sa brzinom

$$\vec{v}_x = \vec{v}_0 \ (\vec{v} = const.) \tag{2.1.34}$$

i slobodnog pada, tj. jednoliko ubrzanog gibanja po pravcu s ubrzanjem g
($\overrightarrow{v} \neq const.$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} = const.$) nazivamo horizontalni hitac.

Nekoj točki $T(x, y)$ ukupna brzina $\overrightarrow{v}$ nastaje zbrajanjem brzina komponentnih gibanja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_x + \overrightarrow{v}_y$ pri čemu su trenutne brzine gibanja $\overrightarrow{v}_x = v_0 \overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{v}_y = gt \overrightarrow{j}$. Odnosno u skalarnom obliku

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} \tag{2.1.35}$$

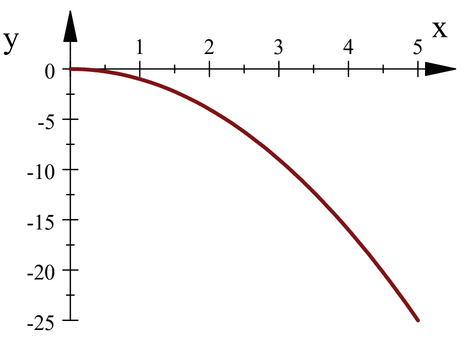
Koordinate točke $T(x, y)$ dobivamo preko prijeđenih putova komponentnog gibanja:

$$x(t) = v_0 \cdot t \tag{2.1.36}$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} \tag{2.1.37}$$

Supstitucijom vremenski promjenjive dobivamo:

$$t = \frac{x}{v_0} \Longrightarrow y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \tag{2.1.38}$$



Graf parabole

Jednadžba (2.1.38) predstavlja putanju tijela pri horizontalnom hitcu. U analitičkom obliku ona odgovara jednadžbi parabole $y = px^2$.

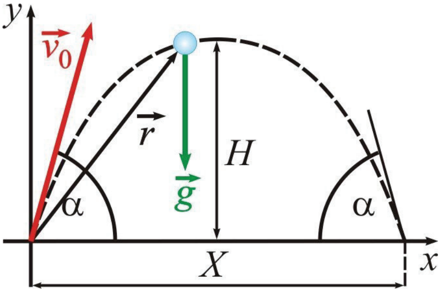
b) Kosi hitac

Zanemarimo li otpor zraka, tijelo izbačeno početnom brzinom v_0 pod nekim kutom elevacije α u odnosu na horizotalnu ravan izvodi složeno krivocrtno gibanje koje nazivamo kosi hitac. Gibanje možemo prikazati po komponentama preko parametarskih jednadžbi

$$x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 \cos\alpha \cdot t \tag{2.1.39}$$

$$y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2.1.40}$$

$$= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2.1.41}$$



Slika 2.9.

Kao što vidimo iz jednadžbi kosi hitac je složeno gibanje sastavljeno od jednolikog gibanja u horizontalnom smjeru (osi x) i hica uvis (koje je pak gibanje u vertikalnom smjeru, smjeru osu y, sastavljeno od jednolikog gibanja uvis $v_{0y} \cdot t$ i slobodnog pada $\frac{1}{2} g t^2$). Eliminacijom parametra t iz parametarskih jednadžbi komponenti gibanja dolazimo do putanje tijela koja je opisana jednadžbom parabole

$$y(x) = \left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \right) \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x \tag{2.1.42}$$

Iz jednadžbe putanje određujemo maksimalnu visinu hica H, koji je zapravo maksimum funkcije $y(x)$, zatim vrijeme uspinjanja tijela t_H i horizontalni domet hica X koji iznose:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{2.1.43}$$

$$t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{2.1.44}$$

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{2.1.45}$$

U posebnom slučaju za vrijednosti kuta $\alpha = 0°$ dobivamo izraze za horizontalni hitac, a za $\alpha = 90°$ hitac uvis te za $\alpha = 270°$ hitac naniže.

Napomena: Obratite pozornost da smo dobili krivocrtna gibanja slaganjem jednostavnijih komponentnih gibanja, a odatle slijedi jedan opći zaključak: svako se krivocrtno gibanje može razložiti na jednostavnija komponentna gibanja.

Kružno gibanje materijalne točke

Specijalni slučaj krivocrtnog gibanja materijalne točke jest kružno gibanje materijalne točke. Ovo gibanje razmatramo zasebno zbog još jednog razloga, a to je da se ono nalazi na graničnom području između translacijskog i rotacijskog gibanja. Slično kao kod translacijskog gibanja promatramo jednu materijalnu točku, a s druge strane materijalna točka opisuje kružne putanje kao kod rotacijskog gibanja.

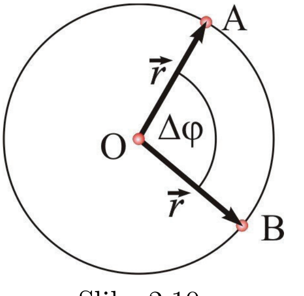
Odavde slijedi da se navedeno gibanje može opisivati preko translacijskih parametara, a također i sa parametrima koji su karakteristični za rotacijska gibanja. Kako je kružno gibanje specijalni slučaj krivocrtnog gibanja slijedi da je sa pozicije translacije ovo gibanje promjenjivo ($\overrightarrow{v} \neq const.$)

a) Kutni parametri

Uz navedene definicije rotacijskog gibanja vidimo da se ne mogu koristiti pojmovi veličina kojima smo opisivali translaciju. Na primjer vektor pomaka svake pojedinačne točke je različit u istom vremenskom intervalu. Zbog toga za opis promjene položaja uvodimo kutni pomak $\Delta\varphi$, koji je jednak za sve točke tijela, za opisivanje promjene položaja.

Definicija 2.1.20 *Kutni pomak $\Delta\varphi$ je kut koji zatvara vektor položaja $\overrightarrow{r}_1$ neke točke u početku gibanja sa vektorom položaja $\overrightarrow{r}_2$ na kraju gibanja materijalne točke.*

Analogno kao što smo definirali brzinu pri translaciji gibanju može se definirati i kutna brzina pri kružnom gibanju.



Slika 2.10.

Definicija 2.1.21 *Kutna brzina ω predstavlja količnik kutnog pomaka $\Delta\varphi$ u nekom vremenskom intervalu Δt;*

$$\omega \overset{def.}{=} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (2.1.46)$$

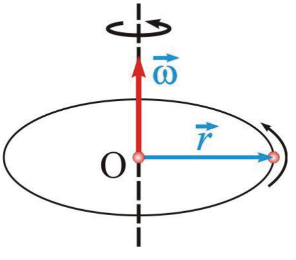
Ova definicija je kvalitativna pa pravu definiciju za kutnu brzinu, tj. trenutnu kutnu brzinu možemo odrediti analogno definiciji brzine kod translacijskog gibanja.

Definicija 2.1.22 *Trenutna kutna brzina je kutna brzina u beskonačno malom vremenskom intervalu*

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{2.1.47}$$

Jednadžba (2.1.47) predstavlja opći oblik kutne brzine. Dakle, kutna brzina predstavlja prvi izvod kutnog pomaka po vremenu.

Kutna brzina je također vektorska veličina, ali pravac vektora leži na osi rotacije.



Slika 2.11.

Ako se kutna brzina mijenja prilikom kružnog gibanja onda uvodimo, slično kao kod translacije, fizičku veličinu koja opisuje tu promjenu, a to je kutno ubrzanje α.

Definicija 2.1.23 *Kutno ubrzanje predstavlja količnik promjene vektora kutne brzine ($\Delta\omega$) u nekom vremenskom intervalu (Δt);*

$$\alpha \overset{def.}{=} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \tag{2.1.48}$$

Odnosno, trenutno kutno ubrzanje je ubrzanje u beskonačno malom vremenskom intervalu:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.1.49}$$

Relacija (2.1.49) predstavlja opći oblik jednadžbe kutnog ubrzanja. Dakle, kutno ubrzanje predstavlja prvi izvod promjene kutne brzine po vremenu.

Iz relacije (2.1.47) i (2.1.49) možemo pisati:

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{2.1.50}$$

Kutno ubrzanje također je vektorska veličina koja leži na osi rotacije, a smjer je određen smjerom razlike kutne brzine.

Fizikalna veličina	**Oznaka**	**Dimenzija**
Kut	φ	rad ili stupnjevi
Kutna brzina	ω	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ili $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Kutno ubrzanje	α	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ ili $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$

b) Jednoliko gibanje materijalne točke po kružnici

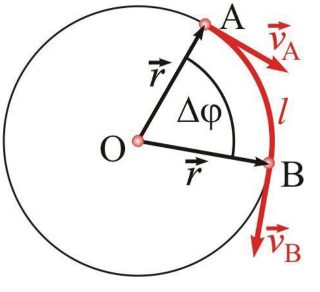
Definicija 2.1.24 *Materijalna točka se giba jednoliko po kružnici ako u istim vremenskim intervalima prelazi iste kutne pomake, odnosno ako je kutna brzina stalna* $\overrightarrow{\omega} = const.$

Koristeći opće jednadžbe (2.1.47) i (2.1.49) možemo opisati ovo gibanje na slijedeći način:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = const. \tag{2.1.51}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{2.1.52}$$

Promatrajmo ovo gibanje sa stajališta translacijskog gibanja. Brzina (tangencijalna) po svojoj geometrijskoj definiciji leži na tangenti u promatranoj točki pa se mijenja pravac vektor od točke do točke što znači da je brzina $\overrightarrow{v} \neq const.$



Slika 2.12.

Možemo naći vezu između tangencijalne i kutne brzine. Za male vrijednosti kuta možemo naći geometrijsku vezu između veličina, l i r (slika 2.12.).

$$\varphi \rightarrow 0, l = \varphi \cdot r / : \Delta t \tag{2.1.53}$$

$$\frac{l}{\Delta t} = \frac{\varphi}{\Delta t} \cdot r, \; v = \omega \cdot r \tag{2.1.54}$$

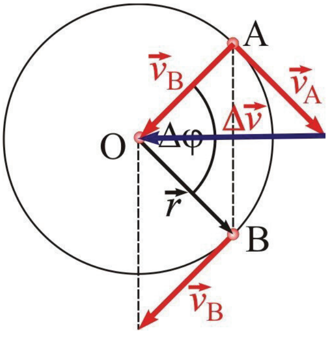
Usporedimo li kutnu i tangencijalnu brzinu kod jednolikog kružnog gibanja možemo reći da se intezitet tangencijalne (obodne) brzine ne mijenja, ali kao vektor se mijenja. Odnosno:

$$\omega = const. \tag{2.1.55}$$

$$v = const. \tag{2.1.56}$$

$$\overrightarrow{v} \neq const. \tag{2.1.57}$$

Iz relacije (2.1.55) koja se odnosi na jednoliko kružno gibanje slijedi jedna posljedica, a to je da je takvo gibanje sa stajališta rotacijskog gibanja jednoliko, a sa pozicije translacije, gibanje je promjenjivo. Dakle, pri tom gibanju mora se javiti jedno ubrzanje koje nazivamo centripetalnim ubrzanjem (a_{cp})



Slika 2.13.

Prema definiciji za ubrzanje imamo:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2.1.58}$$

Na osnovu slike 2.13. vidimo da je promjena brzine, odnosno ubrzanje, uvijek orijentirano ka centru.

Za male vrijednosti kuta ($\varphi \to 0$) možemo naći proporciju:

$$\overset{\frown}{AB} = \Delta r = \Delta s \tag{2.1.59}$$

Relacija (1.34) predstavlja vezu između centripetalnog ubrzanja i kutne, odnosno tangencijalne brzine.

Napomena: Kružno gibanje je periodično gibanje, tj. gibanje koje se nakon nekog vremena $t = T$ ponavlja. Ovo vrijeme ponavljanja naziva se period (T), a broj perioda u jednoj sekundi frekvencija $f = \frac{1}{T}$. Koristeći relacije za kutnu brzinu možemo naći vezu između navedenih veličina:

$$\left.\begin{array}{c} \omega = \frac{\varphi}{t} \\ \varphi = 2\pi \\ t = T \end{array}\right\} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \tag{2.1.60}$$

c) Jednoliko promjenjivo gibanje po kružnici

Definicija 2.1.25 *Jednoliko promjenjivo kružno gibanje je ono gibanje u kojem se u istim vremenskim intervalima jednako mijenja kutna brzina. Odnosno kutno ubrzanje je stalno.*

Definiciju možemo pisati u formalnom obliku:

$$\alpha(t) = konst. \tag{2.1.61}$$

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \tag{2.1.62}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \tag{2.1.63}$$

Koristeći ove opće jednadžbe možemo odrediti trenutnu kutnu brzinu $\omega(t)$ i prevaljeni kutni pomak $\varphi(t)$ za neko vrijeme t.

$$\alpha(t) = konst.$$

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(t)\,dt = \alpha t + \omega_0$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^t \omega(t)\,dt = \int_0^t (\alpha t + \omega_0)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0\end{aligned}$$

Vidjeli smo da postoji veza između kutne brzine i tangencijalne brzine. Kod ovog gibanja pored centripetalnog ubrzanja (a_{cp}) javlja se i tangencijalno ubrzanje (a_t). Ovdje također možemo naći vezu između kutnog ubrzanja (α) i tangencijalnog ubrzanja (a_t).

$$a_t = \alpha \cdot r \tag{2.1.64}$$

Usporedimo li jednadžbe koje opisuju translacijsko gibanje materijalne točke s jednadžbama koje opisuju rotacijsko gibanje ili konkretno jednadžbe gibanja jednolikog promjenjivog gibanja materijalne točke duž pravca i jednolikog promjenjivog gibanja materijalne točke po kružnici, onda primjećujemo da postoji potpuna analogija.

Također koristeći veze između kutnih i tangencijalnih parametra, možemo formalno uz supstituciju prijeći s jedne odgovarajuće jednadžbe na drugu. Ovo je moguće zbog toga što su oba oblika gibanja izraz jednog jedinstvenog mehaničkog gibanja materijalne točke.

d) Analogija između pravocrtnih i kružnih gibanja

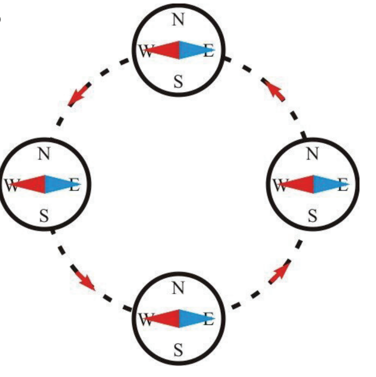
Pravocrtno	Kružno
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\,(t)$	$\varphi = \varphi\,(t)$
$\overrightarrow{v}\,(t) = \frac{\overrightarrow{r}(t)}{dt}$	$\omega\,(t) = \frac{\varphi(t)}{dt}$
$\overrightarrow{a}\,(t) = \frac{\overrightarrow{v}(t)}{dt}$	$\alpha\,(t) = \frac{\omega(t)}{dt}$
1. Jednoliko pravocrtno	1. Jednoliko kružno
$v = const.$	$\omega = const.$
$v = \frac{s}{t};\ s = v \cdot t$	$\omega = \frac{\phi}{t};\ \phi = \omega \cdot t$
2. Jednoliko promjenjivo	2. Jednoliko promjenjivo
$v \neq const.$	$\omega \neq const.$
$a = const.$	$\alpha = const.$
$v = v_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$
$s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$	$\phi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\phi}$
$v = \omega r,\ a = \alpha r$ - relacije povezivanja	

2.2 Problemski zadaci

Problem 2.2.1 *Ako kompas (busola), čija magnetna igla pokazuje pravac sjever-jug, gibamo po kružnici u horizontalnoj ravnini (slika 2.14.), magnetna igla će vršiti: a) kružno gibanje, b) translacijsko gibanje ili c) kombinaciju kružnog i translacijskog gibanja.*

Odgovor:

Gibanje magnetske igle je translacijsko gibanje jer spojnica bilo koje dvije točke tijekom gibanja ostaje sama sebi paralelna. Istina je da su putanje pojedinih točaka magnetne igle kružnice, ali središta tih kružnica ne leže na zajedničkom pravcu (osi rotacije), što bi u slučaju rotacijskog gibanja bilo potrebno.



Slika 2.14.

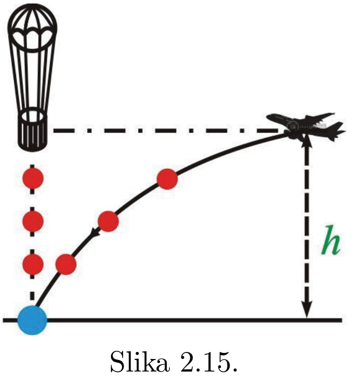
Gibanje kućišta može biti dvojako: ako je položaj igle u odnosu na kućište stalno isti, onda kućište također vrši translacijsko gibanje; ako se položaj mijenja tako da kućište rotira u odnosu na iglu, onda kućište vrši rotacijsko gibanje.

Problem 2.2.2 *Na visini h nalaze se balon i zrakoplov koji leti prema balonu (slika 2.15.). Iz zrakoplova i balona se kuglom gađa meta vertikalno ispod balona. Ako su istovremeno kugle izbačene iz balona i zrakoplova, kojim redoslijedom će pogađati metu i zašto?*

Odgovor:

Vrijeme padanja je isto pa će kugle istovremeno pogoditi metu. Ovdje se radi o složenom gibanju zrakoplova (horizontalni hitac).

Po principu superpozicije visina kugle pri horizontalnom hitcu ne ovisi o komponenti horizontalne brzine, jer je u vertikalnom smjeru to gibanje slobodan pad isto kao i kod kugle koja se ispušta iz balona, pa je vrijeme padanja te dvije



Slika 2.15.

kugle isto (odakle slijedi da će te dvije
kugle istovremeno pogoditi metu, jer su
istovremeno ispuštene s iste visine). Naravno, ako se uzme u obzir otpor zraka to više neće vrijediti.

Problem 2.2.3 *Ako je vektor brzine nekog tijela suprotnog smjera u odnosu na vektor njegovog ubrzanja, iznos brzine tijela:*

1. *postaje manji,*
2. *ostaje konstantan,*
3. *postaje veći.*

Odgovor:
Brzina postaje manja.

Problem 2.2.4 *Može li tijelo u nekom trenutku vremena imati iznos brzine nula, a da se u isto vrijeme giba jednoliko promjenjivo?*

Odgovor:
Tijelo može imati brzinu nula u slučaju kada se giba jednoliko usporeno ($\overrightarrow{a} = const.$) i pri prelasku u jednoliko ubrzano gibanje trenutna će brzina iznositi nula.

Problem 2.2.5 *Objasnite zašto relacije za slobodni pad i vertikalni hitac možemo pisati u skalarnome obliku?*

Odgovor:
Relacije za slobodni pad i vertikalni hitac možemo pisati u skalarnom obliku jer su vektori brzine i ubrzanja kolinearni (svi su vektori vertikalni).

Problem 2.2.6 *Koja od gibanja smatrate složenim i iz kojih osnovnih gibanja su sastavljena:*

1. *slobodni pad,*
2. *horizontalni hitac*

Odgovor:

1. Slobodni pad je jednostavno gibanje, tj. ravnomjerno ubrzano bez početne brzine. To se može i formalno odrediti analizirajući oblik relacije za brzinu

   $$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} \cdot t$$

   Budući da se slaganje brzina kod složenog gibanja sastoji od vektorskog
   zbrajanja iz ove relacije zaključujemo da se radi o jednostavnom gibanju.

2. Vertikalni hitac je složeno gibanje, koje je sastavljeno od jednolikog
   pravocrtnog gibanja brzine $\overrightarrow{v}_0$ i jednoliko ubrzanog gibanja (tj. slobodnog pada) što se može vidjeti iz relacije za brzinu

   $$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 \pm \overrightarrow{g} \cdot t$$

   Prvi član predstavlja komponentno gibanje (jednoliko pravocrtno), a drugi član jednoliko ubrzano gibanje (slobodni pad).

Problem 2.2.7 *Je li moguće da čovjek hoda, a da njegova apsolutna brzina, u odnosu na zemlju, bude jednaka nuli? Objasni odgovor.*

Odgovor:
Moguće je pod uvjetom da se prenosna brzina sustava u kojem se nalazi čovjek odnosi samo na prenosni sustav (npr. traka za hodanje).

Problem 2.2.8 *Brod se giba brzinom v_1. Sa broda se izbaci tijelo brzinom v_2 vertikalno naviše.*

1. Gdje će pasti tijelo?

2. Nakon koliko vremena će tijelo pasti? Kako se odnose vremena pada u slučaju da se tijelo baci istom brzinom v_2 vertikalno naviše, u slučaju da brod miruje?

Odgovor:
Tijelo će pasti na mjestu izbačaja (ovo važi za promatrača na brodu i na obali). Za promatrača na brodu tijelo će se gibati po zakonu vertikalnog hitca i slobodnog pada, a za promatrača na obali tijelo će vršiti složeno gibanje (kosi hitac) jer ono posjeduje horizontalnu brzinu broda. Vremena su ista.

Problem 2.2.9 *Koja gibanja definiraju slijedeće jednadžbe:*

1. $f = const.$; $|\overrightarrow{v}| = const.$
2. $T = const.$; $\overrightarrow{a}_t = const.$
3. $\overrightarrow{\omega} = const.$; $\overrightarrow{v} \neq const.$
4. $|\overrightarrow{a}_r| = const.$; $|\overrightarrow{v}| = const.$
5. $\overrightarrow{\alpha} = const.$; $\overrightarrow{a}_t = const.$

Odgovor:

1. Gibanje je jednoliko kružno gibanje, jer je $|\overrightarrow{v}| = const.$ i $f = const.$, odnosno $\omega = 2\pi f = const.$.
2. Jednoliko kružno gibanje.
3. Jednoliko kružno gibanje.
4. Jednoliko kružno gibanje.
5. Jednolikopromjenjivo kružno gibanje.

Problem 2.2.10 *Kutna brzina male kazaljke (kazaljka koja pokazuje sate) običnoga mehaničkoga sata iznosi:*

1. $0.000143 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
2. $0.261 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
3. $0.00174 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
4. $0.523 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Odgovor:

Za vrijeme od $T = 1\,\text{h} = 3600\,\text{s}$ mala kazaljka napravi kut od $\alpha = 2\pi\,\text{rad}$, pa je kutna brzina jednaka

$$\omega = \frac{2\pi\,\text{rad}}{3600\,\text{s}} = 1.745\,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0.00174 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Problem 2.2.11 *Objasnite zašto vektori kutne brzine ($\overrightarrow{\omega}$) i kutnog ubrzanja ($\overrightarrow{\alpha}$) leže na osi rotacije, odnosno na pravcu koji je okomit na ravnnu kruženja točke? Napomena: promatrajte relacije obodne brzine i ubrzanja.*

Odgovor:

Razlog je u tome što su obodna brzina i tangencijalno ubrzanje vektorski produkt kutnih veličina i vektora pomaka (polumjera).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{a}_t &= \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{r}\end{aligned}$$

Problem 2.2.12 *Objasnite kako jedno gibanje sa stajališta rotacijskog gibanja može biti jednoliko ($\overrightarrow{\omega} = const.$), a sa stajališta translacijskog gibanja promjenjivo ($\overrightarrow{v} \neq const.$)?*

Odgovor:

Moguće je iz jednostanog razloga što je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, a $v = |\overrightarrow{v}| = \omega \cdot r$ jer su vektori ortogonalni, što znači da vektor kutne brzine uvijek leži na jednom pravcu (osi rotacije), a njen intezitet ne ovisi od rotacije obodne brzine, nego je $\omega = const.$, ako je $|\overrightarrow{v}| = const.$ pa iz tog uvjeta slijedi da je $\overrightarrow{\omega} = const.$.

2.3 Primjeri

Primjer 2.3.1 *Brod je isplovio iz luke i plovio je* 155 km *po pravcu* 18° *istočno od sjevera. Koliki je pomak napravio u smjeru istoka a koliki u smjeru sjevera? Prikažite vektor pomaka preko jediničnih vektora. jedinični vektor* $\overrightarrow{i}$ *je usmjeren prema istoku, a* $\overrightarrow{j}$ *prema sjeveru. Kako bi izgledao smjer pomaka ako bi jedinični vektor* $\overrightarrow{j}$ *bio u smjeru juga?*

Rješenje:
Kako je kut vektora $\alpha = 18^\circ$ od sjevera prema istoku to je

$$\begin{aligned} A_x &= A\sin\alpha = 155\,\mathrm{km}\cdot\sin(18) = 47.9\,\mathrm{km} \\ A_y &= A\cos\alpha = 155\,\mathrm{km}\cdot\cos(18) = 147.4\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

a) U slučaju kada imamo da je koordinatni prikaz odabran na način da je $\overrightarrow{i}$ −istok, $\overrightarrow{j}$ −sjever slijedi

$$\overrightarrow{A} = \left(A_x\overrightarrow{i} + A_y\overrightarrow{j}\right) = \left(47.9\overrightarrow{i} + 147.4\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{km}$$

b) dok je u drugom prikazu gdje je os y usmjerena prema dolje, odnosno $\overrightarrow{i}$ −istok, $\overrightarrow{j}$ −jug

$$\overrightarrow{A} = \left(A_x\overrightarrow{i} + A_y\overrightarrow{j}\right) = \left(47.9\overrightarrow{i} - 147.4\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{km}$$

Primjer 2.3.2 *Automobil se giba jednoliko duž jedne petnaestine puta brzinom od* $30\frac{km}{h}$*, zatim duž petine puta brzinom* $50\frac{km}{h}$ *te duž trećine puta brzinom* $70\frac{km}{h}$*. Kolikom se brzinom gibao preostali dio puta ako je srednja brzina gibanja duž cijelog puta* $60\frac{km}{h}$*?*

Rješenje:
Srednja brzina definirana je izrazom $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Označimo pojedine dijelove puta s_1, s_2, s_3 i s_4, a brzine na pripadnim dijelovima puta sa v_1, v_2, v_3 i v_4. Tada je srednja brzina na ukupnom putu jednaka

$$\overline{v} = \frac{s_{uk}}{t_{uk}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{15} s_{uk} = v_1 t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{s_{uk}}{15 \cdot v_1} \\
s_2 &= \frac{1}{5} s_{uk} = v_2 t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{s_{uk}}{5 \cdot v_2} \\
s_3 &= \frac{1}{3} s_{uk} = v_3 t_3 \Longrightarrow t_3 = \frac{s_{uk}}{3 \cdot v_3} \\
s_4 &= s_{uk} - s_1 - s_2 - s_3 = \left(1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) s_{uk} \\
s_4 &= \frac{2}{5} s_{uk} = v_4 t_4 \Longrightarrow t_4 = \frac{2 s_{uk}}{5 \cdot v_4}
\end{aligned}$$

uvrštavajući u prethodni izraz dobivamo

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= \frac{s_{uk}}{\frac{s_{uk}}{15 \cdot v_1} + \frac{s_{uk}}{5 \cdot v_2} + \frac{s_{uk}}{3 \cdot v_3} + \frac{2 s_{uk}}{5 \cdot v_4}} \\
&= \frac{s_{uk}}{s_{uk} \left(\frac{1}{15 \cdot v_1} + \frac{1}{5 \cdot v_2} + \frac{1}{3 \cdot v_3} + \frac{2}{5 \cdot v_4}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{15 \cdot v_1} + \frac{1}{5 \cdot v_2} + \frac{1}{3 \cdot v_3} + \frac{2}{5 \cdot v_4}\right)}
\end{aligned}$$

naša tražena brzina je v_4 pa slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{v}} &= \frac{1}{15 \cdot v_1} + \frac{1}{5 \cdot v_2} + \frac{1}{3 \cdot v_3} + \frac{2}{5 \cdot v_4} \\
\frac{2}{5 \cdot v_4} &= \frac{1}{\overline{v}} - \left(\frac{1}{15 \cdot v_1} + \frac{1}{5 \cdot v_2} + \frac{1}{3 \cdot v_3}\right) \\
\frac{1}{v_4} &= \frac{5}{2}\left[\frac{1}{\overline{v}} - \left(\frac{1}{15 \cdot v_1} + \frac{1}{5 \cdot v_2} + \frac{1}{3 \cdot v_3}\right)\right] \\
\frac{1}{v_4} &= \frac{5}{2}\left[\frac{1}{\overline{v}} - \left(\frac{v_2 v_3 + 3 v_1 v_3 + 5 v_1 v_2}{15 v_1 v_2 v_3}\right)\right]
\end{aligned}$$

odavde je $\frac{1}{60\frac{\text{km}}{\text{h}}} - \frac{17300\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{1575000\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^3} = \frac{179}{31\,500} = 5.682\,5 \times 10^{-3}$

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{2}{5\left[\frac{1}{v} - \left(\frac{v_2v_3+3v_1v_3+5v_1v_2}{15v_1v_2v_3}\right)\right]} \\ &= \frac{2}{5\left[\frac{1}{60\frac{\text{km}}{\text{h}}} - \left(\frac{50\frac{\text{km}}{\text{h}}70\frac{\text{km}}{\text{h}}+3\cdot30\frac{\text{km}}{\text{h}}70\frac{\text{km}}{\text{h}}+5\cdot30\frac{\text{km}}{\text{h}}50\frac{\text{km}}{\text{h}}}{15\cdot30\frac{\text{km}}{\text{h}}50\frac{\text{km}}{\text{h}}70\frac{\text{km}}{\text{h}}}\right)\right]} \\ &= \frac{2}{5\cdot\left[\frac{1}{60\frac{\text{km}}{\text{h}}} - \frac{17300\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{1575000\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^3}\right]} \\ &= \frac{2}{5\cdot\frac{179}{31\,500\frac{\text{km}}{\text{h}}}} = 70.39\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.3 *Automobil krene iz mirovanja jednoliko ubrzano akceleracijom $a_1 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, postigne brzinu $v_1 = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$, giba se jednoliko tom brzinom i zatim uspori stalnim ubrzanjem $a = -3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ do brzine $v = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Koliki je prijeđeni put ako je vožnja trajala $20\,\text{s}$?*

Rješenje:

Koristeći izraz za jednoliko ubrzano gibanje i zdane vrijednosti fizikalnih veličina dobiva se

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}a_1t_1^2 \\ v_1 &= a_1t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{40}{3}\,\text{s} \\ s_1 &= \frac{1}{2}\cdot 1.5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{40}{3}\,\text{s}\right)^2 = \frac{400}{3}\,\text{m} \end{aligned}$$

za drugi i treći dio puta imamo

$$\begin{aligned} s_2 &= v_2t_2 \\ s_3 &= v_3t_3 + \frac{1}{2}a_3t_3^2 \end{aligned}$$

iz vrijednosti za konačnu brzinu dobivamo

$$v_k = v_3 = v_0 + at = v_2 + a_3t_3$$

$$
\begin{aligned}
t_3 &= \frac{v_3 - v_2}{a_3} = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{10}{3}\,\mathrm{s} \\
t_2 &= t - t_1 - t_3 = 20\,\mathrm{s} - \frac{40}{3}\,\mathrm{s} - \frac{10}{3}\,\mathrm{s} = \frac{10}{3}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_2 &= v_2 t_2 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{10}{3}\,\mathrm{s} = \frac{200}{3}\,\mathrm{m} \\
s_3 &= v_3 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{10}{3}\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\left(-3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\,\mathrm{s}\right)^2 \\
&= \frac{100}{3}\,\mathrm{m} + \frac{50}{3}\,\mathrm{m} = \frac{150}{3}\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Primjer 2.3.4 *Trkači su krenuli sa tržnice i trčali su* $s_1 = 200\,\mathrm{m}$ *prema istoku prosječnom brzinom* $v_1 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*, zatim su trčali prema zapadu* $s_2 = 280\,\mathrm{m}$*.*

a) *Koliki je vektor pomaka na kraju trčanja u odnosu na tržnicu, a koliki je prijeđeni put?*

b) *Koliko iznosi prosječna brzina na cijelom putu?*

Rješenje:

a) Vektor pomaka jednak je

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (200\,\mathrm{m})\,\vec{i} + (280\,\mathrm{m})\left(-\vec{i}\right) = -80\,\vec{i}$$

dok je ukupni riješeni put jednak zbroju pojedinih puteva

$$s = s_1 + s_2 = 200\,\mathrm{m} + 280\,\mathrm{m} = 480\,\mathrm{m}$$

b) Prosječna brzina jednaka je ukupnom putu podijeljenom s ukupnim vremenom. Ukupno vrijeme jednako je

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{s_1}{v_1} = \frac{200\,\mathrm{m}}{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 40\,\mathrm{s} \\
t_2 &= \frac{s_2}{v_2} = \frac{280\,\mathrm{m}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 70\,\mathrm{s} \\
t &= t_1 + t_2 = 40\,\mathrm{s} + 70\,\mathrm{s} = 110\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{480\,\mathrm{m}}{110\,\mathrm{s}} = 4.36\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 2.3.5 *Dva trkača istovremeno krenu iz jedne točke po* 200 m *dugoj kružnoj stazi u suprotnim smjerovima. Prvi trči stalnom brzinom* $v_1 = 6.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*, a drugi stalnom brzinom* $v_2 = 3.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*.*

a) *Nakon koliko vremena će se prvi put susresti?*

b) *Koliku je udaljenost svaki od trkača pretrčao do trenutka susreta?*

Rješenje:

Duljina staze je 200 m i zadatak bi se mogao rješavati kao da trkači trče jedan prema drugom po pravcu sa iste udaljenosti.

a) Ukupni prijeđeni put jednak je zbroju prijeđenih puteva trkača, vrijeme kada će se trkači susresti t_s jeste kada zajedno pretrče 200 m

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = v_1 t_s + v_2 t_s = (v_1 + v_2)\, t_s \\ t_s &= \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{200\,\mathrm{m}}{6.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 20\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

b) Svaki od trkača je pretrčao

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t_s = 6.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 20\,\mathrm{s} = 124\,\mathrm{m} \\ s_2 &= v_2 t_s = 3.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 20\,\mathrm{m} = 76\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.6 *Automobil usporava jednoliko tako da za vrijeme* $t_1 = 8\ s$ *prijeđe polovinu puta do zaustavaljanja, a preostali dio puta za* $t_2 = 12\ s$*. Kolika je početna brzina automobila i usporenje ako je ukupni prijeđeni put* $s = 300\ \mathrm{m}$*?*

Rješenje:

Prijeđeni put za jednoliko ubrzano (usporeno za $a < 0$) gibanje je dan izrazom

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Kako automobil prvu polovicu puta $s_1 = \frac{s}{2}$ prijeđe za $t_1 = 8\ \text{s}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{s}{2} = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \\
s &= 2v_0 t_1 + a t_1^2 \\
v_0 &= \frac{s}{2t_1} - \frac{a t_1}{2}
\end{aligned}$$

za ukupni prijeđeni put s potrebno je vrijeme $t = t_1 + t_2$ pa će biti

$$s = v_0 (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} a (t_1 + t_2)^2$$

Ovo je sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice. Uvrštavanjem vrijednosti za v_0 dobiva se

$$\begin{aligned}
s &= \left(\frac{s}{2t_1} - \frac{a t_1}{2} \right) (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} a (t_1 + t_2)^2 \\
s &= \frac{s}{2} + \frac{s t_2}{2t_1} - \frac{a t_1^2}{2} - \frac{a t_1 t_2}{2} + \frac{a}{2} \left(t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2 \right)
\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{s}{2} \left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right) = \frac{a}{2} \left(-t_1^2 - t_1 t_2 + t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2 \right)$$

pa je ubrzanje (usporenje)

$$\begin{aligned}
a &= \frac{s \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1} \right)}{t_2^2 + t_1 t_2} = \frac{s \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1} \right)}{t_2 (t_1 + t_2)} = -\frac{s (t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} \\
a &= -\frac{300\ \text{m} \cdot (12\ \text{s} - 8\ \text{s})}{12\ \text{s} \cdot 8\ \text{s} (12\ \text{s} + 8\ \text{s})} = -\frac{5}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

Sada izračunajmo početnu brzinu

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{s}{2t_1} - \frac{a t_1}{2} = \frac{300\ \text{m}}{2 \cdot 8\ \text{s}} - \frac{\left(-\frac{5}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot 8\ \text{s}}{2} \\
v_0 &= \frac{85}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Napomena: korištenjem izraza $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ za jednoliko usporeno gibanje, dobiva se isti rezultat. Samo bi a bilo pozitivno jer je već u izrazu pretpostavljena negativnost akceleracije.

Primjer 2.3.7 *Autobus mora prijeći udaljenost od mjesta A do mjesta B u određenom vremenu. Ako bi vozio brzinom* $v_1 = 48\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *kasnio bi pola sata. Ako bi vozio brzinom od* $v_2 = 60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *stigao bi* $12\,\mathrm{min}$ *prije. Kolika je udaljenost između mjesta A i B? Koliko je predviđeno vrijeme za prelazak te udaljenosti? Kolikom brzinom treba voziti autobus da stigne na vrijeme?*

Rješenje:
Ako vrijeme putovanja izrazimo u satima, tada je

$$\begin{aligned} t_1 &= t + \frac{1}{2}\,\mathrm{h} \\ t_2 &= t - \frac{1}{5}\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Iz jednakosti puteva slijedi veza

$$\begin{aligned} s &= v_1 t_1 = v_2 t_2 \\ v_1\left(t + \frac{1}{2}\,\mathrm{h}\right) &= v_2\left(t - \frac{1}{5}\,\mathrm{h}\right) \\ v_1 t + \frac{v_1}{2}\,\mathrm{h} &= v_2 t - \frac{v_2}{5}\,\mathrm{h} \\ \left(\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{5}\right)\mathrm{h} &= v_2 t - v_1 t \\ \left(\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{5}\right)\mathrm{h} &= (v_2 - v_1)\, t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\left(\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{5}\right)\mathrm{h}}{v_2 - v_1} = \frac{\left(\frac{48\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2} + \frac{60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{5}\right)\mathrm{h}}{60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 48\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{36\,\mathrm{km}}{12\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 3\,\mathrm{h} \\ s &= v_1 t_1 = 48\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot (3.5\,\mathrm{h}) = 168\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Brzina kojom bi autobus trebao voziti da stigne točno na vrijeme iznosi

$$v_t = \frac{s}{t} = \frac{168\,\mathrm{km}}{3\,\mathrm{h}} = 56\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Primjer 2.3.8 *Autobus stoji na stanici. U namjeri da stigne na autobus čovjek trči prema autobusu stalnom brzinom* $v = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. U trenutku kada autobus krene čovjek je udaljen od autobusa* $s_0 = 8\,\mathrm{m}$*. Autobus ubrzava stalnim ubrzanje od* $a = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *u istom smjeru u kojem čovjek trči. Hoće li čovjek, ako nastavi trčati konstantnom brzinom, uspjeti sustići autobus i ako hoće, kada?*

Rješenje:

Brzina čovjeka je $v = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a njegova udaljenost od autobusa je $s_0 = 5\,\mathrm{m}$. Kako bi čovjek sustigao autobus potrebno je da njegov prijeđeni put za isto vrijeme bude veći od prijeđenog puta autobusa za njihovu početnu udaljenost.

$$\begin{aligned} s_a &= \frac{1}{2}at^2 \\ s_{\check{c}} &= v \cdot t = s_0 + s_a = s_0 + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

Iz jednadžbi slijedi uvjet za potrebno vrijeme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}at^2 - vt + s_0 &= 0 \\ \frac{1}{2}t^2 - 5t + 8 &= 0/\ ^{\cdot 2} \\ t^2 - 10t + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = 5 \pm \frac{\sqrt{36}}{2} = 5 \pm 3 \\ t_1 &= 8 \\ t_2 &= 2 \end{aligned}$$

Primjer 2.3.9 *Posebni trkaći automobili imaju motore čije ubrzanje je proporcionalno vremenu ($a \sim t$) na vrlo kratkim udaljenostima. Ako automobil prijeđe udaljenost od $s = 100\,\mathrm{m}$ za $t = 6\,\mathrm{s}$, kolika je brzina automobila na toj udaljenosti?*

Rješenje:

Kako je ubrzanje proporcionalno vremenu pišemo uz konstantu proporcionalnosti c

$$a = ct$$

Koristeći izraz za ubrzanje slijedi jednadžba

$$\begin{aligned} a &= ct = \frac{dv}{dt} \\ dv &= ctdt \\ \int\limits_0^v dv &= \int\limits_0^t ctdt \Longrightarrow v\,(t) = \frac{1}{2}ct^2 \end{aligned}$$

Iz izraza za brzinu slijedi

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ ds &= vdt = \frac{1}{2}ct^2 dt \\ \int_0^s ds &= \int_0^t \left(\frac{1}{2}ct^2\right) dt \\ s(t) &= \frac{1}{2}c\int_0^t t^2 dt = \frac{c}{2}\frac{t^3}{3} = \frac{ct^3}{6} \end{aligned}$$

Iz zadanih uvjeta za prijeđeni put određuje se nepoznata konstanta c

$$\begin{aligned} s(6\,\mathrm{s}) &= 100\,\mathrm{m} = \frac{c \cdot (6\,\mathrm{s})^3}{6} \\ c &= \frac{100\,\mathrm{m} \cdot 6}{(6\,\mathrm{s})^3} = 2.78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \end{aligned}$$

Kako bi se izračunala brzina u zadanom trenutku vremena, dobivena vrijednost za konstantu c se uvrsti u izraz za brzinu

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2}ct^2 \\ v(6\,\mathrm{s}) &= \frac{1}{2} \cdot 2.78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \cdot (6\,\mathrm{s})^2 = 50.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180.14\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.10 *Motorni čamac plovi od jednog do drugog nepomičnog plovka koji su udaljeni* 5000 m *najprije nizvodno, a zatim uzvodno. Put nizvodno traje* 360 s, *a put uzvodno* 480 s. *Kolika je brzina čamca ako bi on plovio po mirnoj vodi ?*

Rješenje:

Označimo sa v brzinu čamca, a sa V brzinu rijeke. Gibanje nizvodno tada možemo opisati relacijom

$$v + V = \frac{d}{t_1} \tag{2.3.1}$$

a uzvodno

$$v - V = \frac{d}{t_2} \tag{2.3.2}$$

Zbrajanjem (2.3.1) i (2.3.2) se dobiva

$$v = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) = \frac{5}{2}\,(10 + 7.5)\,\frac{\text{km}}{h} = 43.75\frac{\text{km}}{h}$$

Primjer 2.3.11 *Dva plivača krenu s istog položaja najprije nizvodno, do mosta udaljenog $s = 200$ m, a zatim uzvodno. Prvi krene trideset sekundi ranije u odnosu na drugog plivača i pliva brzinom $v_1 = 3\frac{\text{km}}{h}$ u odnosu na rijeku, dok drugi plivač pliva brzinom $v_2 = 5\frac{\text{km}}{h}$. Ako je brzina toka rijeke $v = 2\frac{\text{km}}{h}$ u kojem položaju će se sresti plivači?*

Rješenje:

Plivači će se susresti kada budu imali isti položaj na rijeci. Relativna brzina plivača niz rijeku jednaka je njihovoj brzini u odnosu na rijeku plus brzina rijeke, a uz rijeku se te brzine oduzimaju zbog suprotnog pravca brzine plivača i rijeke. Sustigne li drugi plivač prvog prije dolaska do mosta, ponovno će se susresti pri povratku drugog plivača. Označimo sa s_1 i s_2 prijeđene udaljenosti plivača, a početni trenutak neka je onaj kada prvi plivač krene plivati:

$$\begin{aligned} s_1 &= (v_1 + v)\,t \\ s_2 &= (v_2 + v)\,(t - 30\ \text{s}) \end{aligned}$$

Iz uvjeta $s_1 = s_2$ slijedi

$$\begin{aligned} (v_1 + v)\,t &= (v_2 + v)\,(t - 30\ \text{s}) \\ [(v_2 + v) - (v_1 + v)]\,t &= (v_2 + v) \cdot 30\ \text{s} \end{aligned}$$

odakle je vrijeme t

$$t = \frac{(v_2 + v) \cdot 30\ \text{s}}{v_2 - v_1} = \frac{\left(\frac{25}{18} + \frac{5}{9}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 30\ \text{s}}{\left(\frac{25}{18} - \frac{5}{6}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 105\ \text{s}$$

pa je prijeđeni put jednak

$$s_1 = (v_1 + v)\,t = \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{9}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 105\,\text{s} = 145,8\dot{3}\,\text{m}$$

Kako je drugi plivač susreo prvog prije mosta, ponovno će se susresti nakon povratka drugog plivača. Neka je vrijeme potrebno da drugi plivač stigne do mosta, mjereno od trenutka početka plivanja prvog plivača, označeno sa t_m, tada je

$$\begin{aligned} s &= (v_2+v)(t_m - 30\,\mathrm{s}) \\ t_m &= \frac{s}{v_2+v} + 30\,\mathrm{s} = \frac{200\,\mathrm{m}}{\left(\frac{25}{18}+\frac{5}{9}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + 30\,\mathrm{s} = \frac{720}{7}\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s} = 132.86\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

za to vrijeme je prvi plivač stigao do

$$s_1(t_m) = (v_1+v)(t_m+30\,\mathrm{s}) = \left(\frac{5}{6}+\frac{5}{9}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (132.86\,\mathrm{s}) = 184.53\,\mathrm{m}$$

dakle, u trenutku $t_m = 132.86\,\mathrm{s}$ od trenutka gibanja prvog plivača, drugi stiže do mosta i počinje se vraćati. Sada je njegova ukupna brzina gibanja jednaka $v_2 - v$, a udaljenost prvog i drugog plivača u tom trenutku iznosi

$$d = 200\,\mathrm{m} - 184.53\,\mathrm{m} = 15.47\,\mathrm{m}$$

Vrijeme potrebno da se susretnu drugi put tada će biti

$$t_{uk} = t_m + t_2$$

gdje je

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{d}{(v_2-v)+(v_1+v)} = \frac{d}{v_2+v_1} = \frac{15.47\,\mathrm{m}}{\left(\frac{25}{18}+\frac{5}{6}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ t_2 &= 6.96\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

odakle je

$$t_{uk} = 132.86\,\mathrm{s} + 6.96\,\mathrm{s} = 139.82\,\mathrm{s}$$

pa se plivači nalaze u položaju od starta

$$\begin{aligned} s_2 &= (v_1+v)(t_m+6.96)\ \mathrm{s} \\ s_2 &= \left(\frac{5}{6}+\frac{5}{9}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (139.82\ \mathrm{s}) = 194.19\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.12 *Pored neke kontrolne postaje prođe automobil brzinom $v = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Za njim krene motociklist ubrzanjem $a = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ i to poslije vremena $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$ od trenutka prolaska automobila. Izračunajte vrijeme i mjesto gdje će motociklist stići automobil, pod uvjetom da motociklist održava stalno ubrzanje.*

Rješenje:

Neka motociklist krene u trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$, u tom trenutku automobil je udaljen $s_0 = 25\,\mathrm{m}$. Automobil se giba jednoliko pa je prijeđeni put

$$s_a = v \cdot t + s_0 \tag{2.3.3}$$

a motociklista zbog jednolikog ubrzanja prevali put od

$$s_m = \frac{1}{2}at^2 \tag{2.3.4}$$

Motociklist će sustići automobil kad bude ispunjen uvjet

$$s_m = s_a = s$$

odnosno

$$\frac{1}{2}at^2 = v \cdot t + s_0$$

ovo je kvadratna jednadžba

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{2v}{a}t - \frac{2s_0}{a} &= 0 \\ t^2 - \frac{2 \cdot 25}{5}t - \frac{2 \cdot 100}{5} &= 0 \\ t^2 - 10t - 40 &= 0 \end{aligned}$$

koja ima rješenja,

$$t_1 = \left(5 - \sqrt{65}\right)\,\mathrm{s} = -3.06\,\mathrm{s}$$

koje nema fizikalno značenje u danom primjeru (vrijeme prije prolaska motociklista) i

$$t_2 = \left(\sqrt{65} + 5\right)\,\mathrm{s} = 13.06\,\mathrm{s}$$

Uvrštavanjem drugog rješenja u jednu od jednadžbi za prijeđeni put npr. (2.3.3) dobiva se za prijeđeni put

$$s = v \cdot t + s_0 = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 13.06\,\mathrm{s} + 100\,\mathrm{m} = 426.5\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.13 *Zrakoplov se spušta na pistu brzinom* $180\frac{\mathrm{km}}{h}$ *i jednolikim kočenjem za vrijeme od* $10\,\mathrm{s}$ *smanji brzinu na* $36\frac{\mathrm{km}}{h}$*. Izračunajte akceleraciju zrakoplova i ukupni prijeđeni put do zaustavljanja.*

Rješenje:
Akceleracija zrakoplova iznosi

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\mathrm{s}} = -4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ukupno vrijeme zaustavljanja jednako je

$$t_{uk} = -\frac{v_0}{a} = -\frac{50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{-4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 12.5\,\mathrm{s}$$

pa je prijeđeni put do zaustavljanja jednak

$$s = v_0 \cdot t_{uk} - \frac{1}{2}at_{uk}^2 = 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 12.5\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\left(-4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(12.5\,\mathrm{s})^2 = 312.\,5\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.14 *Dva čovjeka počinju trčati s istog mjesta na međusobno okomitim pravcima. Prvi trči brzinom* $v_1 = 10.8\frac{\mathrm{km}}{h}$*, a drugi brzinom* $v_2 = 18\frac{\mathrm{km}}{h}$*. Kolika je relativna brzina drugog trkača u odnosu na prvoga i kolika je njihova međusobna udaljenost nakon* $t = 120\,\mathrm{s}$*.*

Rješenje:
Uz pretpostavku da prvi trkač trči u smjeru osi x, a drugi u smjeru osi y, njihove se brzine vektorski mogu prikazati kao

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1 &= \left(3\overrightarrow{i}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \overrightarrow{v}_2 &= \left(5\overrightarrow{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Njihova relativna brzina je tada

$$\overrightarrow{v}_{21} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1 = \left(3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

a njen intezitet jednak je

$$v_{21} = \sqrt{3^2 + (-5)^2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{34}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5.83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Njihova udaljenost nakon nakon $120\,\mathrm{s}$ jednaka je

$$d = v_{21} \cdot t = 5.83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 120\,\mathrm{s} = 699.\,72\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.15 *Automobil čiji kotači imaju promjer* $D = 0.65\,\mathrm{m}$*, giba se po ravnom putu brzinom* $v = 70\frac{\mathrm{km}}{h}$*. Pri kočenju automobil se zaustavi poslije prijeđenog puta* $s = 75\,\mathrm{m}$*. Pod pretpostavkom da je usporenje automobila ravnomjerno, izračunajte tangencijalno i kutno usporavanje njegovih kotača tijekom kočenja?*

Rješenje:
Gibanje je jednoliko usporeno pa vrijedi

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v &= v_0 + at \end{aligned}$$

eliminacijom primjenjive veličine vremena t dobivamo za ubrzanje sustava

$$a = -\frac{v_0^2}{2s} = -\frac{\left(19.44\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 75\,\mathrm{m}} = -2.52\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

no, za jednoliko usporenu vrtnju vrijedi

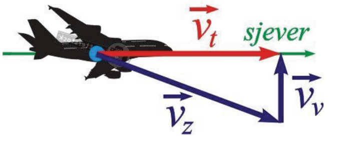
$$a = \alpha \cdot R = \alpha \cdot \frac{D}{2}$$

odakle se dobiva

$$\alpha = \frac{2a}{D} = \frac{2 \cdot \left(-6.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{0.65\,\mathrm{m}} = -7.76\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = -7.76\,\mathrm{s}^{-2}$$

Primjer 2.3.16 *Zrakoplov održava smjer ravno prema sjeveru gibajući se brzinom* $v_z = 360\ \frac{\mathrm{km}}{h}$ *u odnosu prema zraku. Vjetar puše brzinom* $v_v = 72\frac{\mathrm{km}}{h}$ *od istoka prema zapadu. Kolika je rezultantna brzina zrakoplova u odnosu na tlo? Koliki kut* α *mora imati zrakoplov u odnosu na zrak da bi zadržao smjer gibanja prema sjeveru? Koliko će mu vremena biti potrebno da stigne u grad udaljen* $200\,\mathrm{km}$*?*

Rješenje:
Brzina zrakoplova prema tlu dobit će se vektorskim zbrajanjem njegove brzine u odnosu prema zraku i brzine vjetra (slika 2.16.)



Slika 2.16.

$$\vec{v}_t = \vec{v}_z + \vec{v}_v$$

Kako zrakoplov nastoji održati smjer prema sjeveru, a vjetar puše od istoka prema zapadu, komponenta gibanja zrakoplova u odnosu na zrak mora poništavati brzinu vjetra. Iznos brzine $\overrightarrow{v}_t$ dobiva se primjenom Pitagorinog poučka

$$v_t = \sqrt{v_z^2 - v_v^2} = \sqrt{\left(100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 97.\,98\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 352.\,73\frac{\mathrm{km}}{h}$$

Smjer brzine može se odrediti kutom α

$$tg\alpha = \frac{v_v}{v_t} = \frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{97.98\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0.204\,12 \Rightarrow \alpha = 0.20136\,\mathrm{rad} = 11.54^\circ$$

Dakle, zrakoplov će se gibati u odnosu prema tlu brzinom $352.73\frac{\mathrm{km}}{h}$. Kut gibanja zrakoplova u odnosu prema zraku (kada ne bi bilo vjetra) $\alpha = 11.537^\circ$ istočno od sjevera. Vrijeme koje mu je potrebno iznosi

$$t = \frac{s}{v_t} = \frac{200\ 000\,\mathrm{m}}{97.\,98\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2041.\,2\,\mathrm{s} \approx 34\,\mathrm{min}$$

Primjer 2.3.17 *Tijelo je pušteno da slobodno pada sa tornja visokog $h = 30\,\mathrm{m}$. Koliko dugo traje pad tijela, pod pretpostavkom da je otpor zraka zanemariv? Kolika je brzina udara tijela o tlo?*

Rješenje:

Tijelo slobodno pada bez početne brzine i trenja. Prijeđeni put pri ovom gibanju jednak je

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30\,\mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2.\,47\,\mathrm{s}$$

a brzina prilikom pada

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 30\,\mathrm{m}} = 24.\,26\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ili

$$v = gt = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2.\,47\,\mathrm{s} = 24.\,26\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 2.3.18 *Prvo tijelo je bačeno s ruba zgrade visoke* $h = 35\,\mathrm{m}$ *prema dolje, a drugo pušteno da slobodno pada. Kolikom početnom brzinom je prvo tijelo bačeno ako nakon* $t = 1.5\,\mathrm{s}$ *udara o tlo? Koliko će kasnije drugo tijelo pasti na tlo?*

Rješenje:
Prvo tijelo se giba po zakonu

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

neka je t_1 vrijeme pada prvog tijela na tlo. Tada je

$$s(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = h$$

odakle slijedi

$$v_0 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} = \frac{h}{t_1} - \frac{1}{2} g t_1 = \frac{35\,\mathrm{m}}{1.5\,\mathrm{s}} - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.5\,\mathrm{s} = 15.98 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Drugo tijelo se giba po zakonu

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

neka je t_2 vrijeme pada drugog tijela na tlo. Tada je

$$s(t_2) = \frac{1}{2} g t_2^2 = h \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35\,\mathrm{m}}{9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2.67\,\mathrm{s}$$

pa će drugo tijelo pasti nakon

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2.67\,\mathrm{s} - 1.5\,\mathrm{s} = 1.17\,\mathrm{s}$$

Primjer 2.3.19 *Ispustimo kamen da slobodno pada u bunar. Udar u vodu čuje se nakon* $t = 2.5\,\mathrm{s}$. *Odredite dubinu bunara. Brzina zvuka iznosi* $v_z = 340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Rješenje:
Ukupno vrijeme $t = t_p + t_z$ jednako je zbroju vremena pada kamena t_p i vremenu potrebnom da zvuk stigne od površine vode t_z pa vrijedi

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} g t_p^2 \\ h &= v_z t_z = v_z (t - t_p) \end{aligned}$$

Imamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznate. Rješavanje sustava po t_1 daje kvadratnu jednadžbu

$$t_p^2 + \frac{2v_z}{g} t_p - \frac{2v_z}{g} t = 0$$

čija su rješenja

$$\begin{aligned}
(t_p)_{1,2} &= -\frac{v_z}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gt}{v_z}}\right] \\
&= -\frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.5\,\mathrm{s}}{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}\right] \\
&= -\frac{340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\,(1 \pm 1.07)
\end{aligned}$$

rješenje s predznakom + nije fizikalno.

$$(t_p)_1 = -71.73\,\mathrm{s}$$

dok drugo rješenje

$$(t_p)_2 = 2.42\,\mathrm{s}$$

daje visinu bunara

$$h = v_z\,(t - t_p) = 340\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (2.5\,\mathrm{s} - 2.42\,\mathrm{s}) = 27.2\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.20 *Lopta je sa položaja* $1\,\mathrm{m}$ *iznad tla bačena vertikalno prema gore početnom brzinom* $v_0 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*. Kako su međusobno usmjereni vektori brzine i ubrzanja u početnom trenutku? Nakon koliko vremena će lopta dosegnuti najvišu točku? Koliko iznosi maksimalna visina koju doseže lopta? Opišite iznos i smjer vektora brzine kada lopta ponovno prolazi početnom točkom. Nakon koliko vremena će lopta pasti na pod? Kojom stalnom brzinom treba trčati suigrač ako želi uhvatiti loptu kada se ona nalaz na visini od* $1\,\mathrm{m}$ *ako je u trenutku bacanja lopte bio udaljen* $s = 8\,\mathrm{m}$ *u horizontalnom smjeru?*

Rješenje:

U početnom trenutku brzina ima smjer vertikalno prema gore, a ubrzanje smjer vertikalno prema dolje, te međusobno imaju suprotne smjerove. Najvišu točku tijelo doseže u trenutku t_H kada iznos brzine postaje jednako nuli, tj.

$$\begin{aligned} v(t_H) &= v_0 - gt_H = 0 \\ t_H &= \frac{v_0}{g} = \frac{5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.51\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Maksimalna visina je vrijednost prijeđenog puta do vremena t_H kojemu se doda početni položaj

$$\begin{aligned} h(t_H) &= h_0 + s(t_H) = h_0 + v_0 t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 \\ &= 1\,\mathrm{m} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0.51\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0.51\,\mathrm{s})^2 \\ &= 2.274\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Kada lopta ponovno prolazi početnom točkom smjer brzine i ubrzanja su vertikalno prema dolje, smjer brzine je suprotan pčetnom smjeru brzine. Iznos brzine je jednak početnom iznosu od $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Lopta prije udarca o pod treba vrijeme uspinjanja t_H koje mu se doda vrijeme slobodnog pada s maksimalne visine t_p.

$$\begin{aligned} t &= t_H + t_p \\ t_p &= \sqrt{\frac{2h(t_H)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.274\ \mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0.68\,\mathrm{s} \\ t &= 0.51\,\mathrm{s} + 0.68\,\mathrm{s} = 1.19\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Ako suigrač želi uhvatiti loptu na visini od 1 m, treba stići za vrijeme uspinjanja od 1 m do maksimalne visine i slobodnog pada do početnog položaja za što su potrebna identična vremena, tj.

$$\begin{aligned} t_s &= 2t_H \\ s &= v_s \cdot t_s \\ v_s &= \frac{s}{t_s} = \frac{8\,\mathrm{m}}{2 \cdot 0.51\,\mathrm{s}} = 7.843\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.21 *Tijelo je bačeno prema dolje brzinom $v_0 = 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko traje let ako u posljednjoj sekundi tijelo prijeđe jednu četvrtinu ukupne visine s koje je bačeno? Odredite brzinu u trenutku pada te visinu s koje je tijelo bačeno.*

Rješenje:

Označimo ukupno vrijeme leta sa $t = t_1 + t_p$, trajanje leta do posljednje sekunde sa t_1, a posljednju sekundu sa $t_p = 1\,\mathrm{s}$. Ukupni prijeđeni put je

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = v_0(t_1 + t_p) + \frac{g}{2}(t_1 + t_p)^2 \tag{2.3.5}$$

prijeđeni put u vremenu t_1 je

$$s(t_1) = v_0\ t_1 + \frac{g}{2}\ t_1^2 \tag{2.3.6}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} s(t) - s(t_1) &= \frac{1}{4}\ s(t) \\ \frac{3}{4} s\,(t) &= s\,(t_1) \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{4}{3}\ s\ (t_1) = s(t) \tag{2.3.7}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.3.10) i (2.3.11) u (2.3.12) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\left(v_0\ t_1 + \frac{g}{2}\ t_1^2\right) &= v_0(t_1 + t_p) + \frac{g}{2}(t_1 + t_p)^2 \\ \frac{4}{3}\ v_0\ t_1 + \frac{2}{3} g\ t_1^2 &= v_0\ t_1 + v_0\ t_p + \frac{g}{2}(t_1^2 + 2\ t_p t_1 + t_p^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{6} g t_1^2 + \left(\frac{1}{3} v_0 - g t_p\right) t_1 - \left(v_0 t_p + \frac{1}{2} g t_p^2\right) \\ 0 &= t_1^2 + \left(\frac{2 v_0}{g} - 6\ t_p\right)\ t_1 - (\frac{6 v_0 t_p}{g} + 3 t_p^2) \\ 0 &= t_1^2 + \left(\frac{2 \cdot 19.62 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} - 6 \cdot 1\,\mathrm{s}\right)\ t_1 - (\frac{6 \cdot 19.62 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\mathrm{s}}{9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + 3 \cdot 1\,\mathrm{s}^2) \\ 0 &= t_1^2 - 2\,\mathrm{s} \cdot t_1 - 15\,\mathrm{s}^2 \end{aligned}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned} (t_1)_1 &= 5\,\mathrm{s} \\ (t_1)_2 &= -3\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Drugo negativno rješenje kvadratne jednadžbe nema fizikalni smisao. Ukupno vrijeme leta je $t = t_1 + t_p = 5\,\mathrm{s} + 1\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{s}$. Brzina kojom tijelo padne na tlo iznosi

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + gt \\ v(6\,\mathrm{s}) &= 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 6\,\mathrm{s} = 78.48\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Visina s koje je tijelo bačeno iznosi

$$\begin{aligned} s(t) &= v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ s(6\,\mathrm{s}) &= 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (6\,\mathrm{s})^2 = 294.24\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Tijelo je padalo do posljednje sekunde (prvih pet sekundi)

$$s(5\,\mathrm{s}) = 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 19.62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (5\,\mathrm{s})^2 = 220.68\,\mathrm{m}$$

dok je u posljednjoj sekundi palo

$$s(t_p) = s(6\,\mathrm{s}) - s(5\,\mathrm{s}) = 294.24\,\mathrm{m} - 220.68\,\mathrm{m} = 73.56\,\mathrm{m}$$

što odgovara $\frac{1}{4}$ ukupnog puta.

Primjer 2.3.22 *S vrha zgrade, u istom trenutku, jedno tijelo bacimo vertikalno u vis, a drugo nadolje istom početnom brzinom $v_0 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Poslije koliko će vremena međusobna udaljenost tijela biti jednaka petini visine zgrade, ako tijelo bačeno nadolje udari o tlo $t = 3$ s nakon izbacivanja? Kolika je visina zgrade h?*

Rješenje:
Visinu zgrade dobit ćemo iz izraza za hitac naniže:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 = 59.15\ \mathrm{m}$$

Pretpostavivši da nakon vremena t' međusobna udaljenost tijela bude jednaka petini visine tornja. Tijelo bačeno vertikalno u vis opisuje se jednadžbom

$$h_1 = v_0 t' - \frac{1}{2}g\left(t'\right)^2 \tag{2.3.8}$$

a drugo tijelo bačeno nadolje

$$h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2} g \left(t'\right)^2 \tag{2.3.9}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.3.8) i (2.3.9) dobiva se relativna udaljenost ta dva tijela, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{h}{5} &= h_1 + h_2 \\
\frac{h}{5} &= v_0 t' - \frac{1}{2} g \left(t'\right)^2 + v_0 t' + \frac{1}{2} g \left(t'\right)^2 \\
\frac{h}{5} &= 2 v_0 t' \\
t' &= \frac{h}{10 v_0} = \frac{59.15\,\mathrm{m}}{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.18\ \mathrm{s}
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.23 *Tijelo slobodno pada s visine $h = 500\,\mathrm{m}$. Tu visinu podijelite na 4 dijela tako da vrijeme padanja bude jednako na svakom dijelu. Koliko je ukupno vrijeme pada i vrijeme na pojedinom dijelu puta?*

Rješenje:

Označimo sa t vrijeme na pojedinom dijelu puta. Pređeni put pri slobodnom padu tada iznosi:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} g\ (2t)^2$$

$$h = h_1 + ... + h_n = \frac{1}{2} g\ (nt)^2$$

Nadalje slijedi

$$t^2 = \frac{2h}{g n^2}$$

pa je

$$t = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 500\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2.52\,\mathrm{s}$$

odnosno ukupno vrijeme pada iznosi

$$t_{nk} = n \cdot t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10.1\,\mathrm{s}$$

Općenito k-ti dio puta označimo sa h_{k-ti}, gdje je $k \in [1, n]\,, k \in \mathbb{Z}$ odnosno u ovom primjeru od 1 do 4.

$$h_{k-ti} = \frac{1}{2} g\ (kt)^2 - \frac{1}{2} g\left[(k-1)t\right]^2 = \frac{1}{2} g t^2 (2k-1) = \frac{h}{n^2}(2k-1)$$

pa je za $n = 4$

$$k = 1 \Longrightarrow h_1 = \frac{h}{4^2} = \frac{h}{16} = \frac{500\,\mathrm{m}}{16} = 31.25\,\mathrm{m}$$

$$k = 2 \Longrightarrow h_2 = \frac{h}{16}\,(2 \cdot 2 - 1) = \frac{3h}{16} = 3h_1 = 93.75\,\mathrm{m}$$

$$k = 3 \Longrightarrow h_3 = \frac{h}{16}\,(2 \cdot 3 - 1) = \frac{5h}{16} = 5h_1 = 156.25\,\mathrm{m}$$

$$k = 4 \Longrightarrow h_4 = \frac{h}{16}\,(2 \cdot 4 - 1) = \frac{7h}{16} = 7h_1 = 218.75\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.24 *Tijelo je bačeno nadolje brzinom $v_0 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko traje let ako u posljednjoj sekundi tijelo prijeđe polovicu ukupne visine s koje je bačeno?*

Rješenje:

Označimo ukupno vrijeme leta sa $t = t_1 + t_p$, trajanje leta do posljednje sekunde sa t_1, a posljednju sekundu sa $t_p = 1\,\mathrm{s}$. Ukupni prijeđeni put je

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = v_0(t_1 + t_p) + \frac{g}{2}(t_1 + t_p)^2 \tag{2.3.10}$$

a put prijeđeni u vremenu t_1 je

$$s(t_1) = v_0\ t_1 + \frac{g}{2}\ t_1^2 \tag{2.3.11}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$s(t) - s(t_1) = \frac{1}{2}\ s(t)$$

odnosno

$$s(t) = 2\ s\ (t_1) \tag{2.3.12}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.3.10) i (2.3.11) u (2.3.12) dobivamo:

$$v_0\ t_p + v_0\ t_1 + \frac{g}{2}(t_p^2 + 2\ t_p t_1 + t_1^2) = 2\ v_0\ t_1 + g\ t_1^2$$

$$g\ t_1^2 + 2(v_0 - g\ t_p)\ t_1 - t_p(g\ t_p + 2\ v_0) = 0$$

$$t_1^2 - 0.981\ t_1 - 2.02 = 0$$

$$(t_1)_1 = 1.99\,\mathrm{s}.$$

Drugo negativno rješenje kvadratne jednadžbe nema fizikalni smisao. Ukupno vrijeme leta je $t = t_1 + t_p = 2.99\,\mathrm{s}$.

Primjer 2.3.25 *Tijelo je bačeno u horizontalnome pravcu s visine* $h = 10\,\mathrm{m}$ *iznad zemlje. Tijelo padne na horizontalnoj udaljenosti* $D = 18\,\mathrm{m}$ *od mjesta bacanja. Pod kojim kutom u odnosu na vertikalu će tijelo pasti na zemlju?*

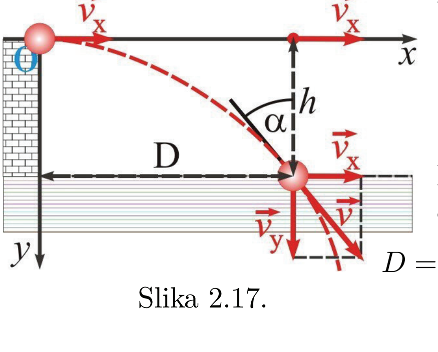
Rješenje:

Kut α pod kojim će tijelo pasti dobivamo iz odnosa inteziteta brzina u x i y smjeru, tako da vrijedi

$$\tan\alpha = \frac{v_x}{v_y} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{v_x}{v_y}$$

Tijelo će padati u y smjeru slobodno pa je vrijeme leta

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\,\mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.43\,\mathrm{s}$$



Slika 2.17.

i za to vrijeme postigne brzinu u y - smjeru

$$v_y = gt = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 10\,\mathrm{m}} = 14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Komponentu brzine u x - smjeru dobivamo iz jednadžbe

$$D = v_x t \Rightarrow v_x = \frac{D}{t} = \frac{18\,\mathrm{m}}{1.43\,\mathrm{s}} = 12.59\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

pa je kut α u toj točki jednak

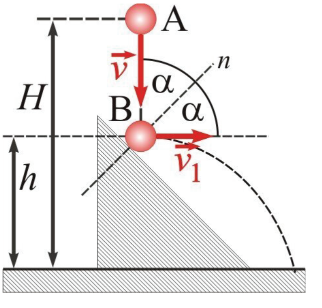
$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{12.59\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \arctan 0.9 = 0.7328\,\mathrm{rad} = 42^\circ$$

Primjer 2.3.26 *Iz točke A, koja se nalazi na visini $H = 35\,\mathrm{m}$, ispušteno je tijelo. Pri slobodnom padu tijelo udara u točki B u strmu ravan od koje se odbija pod istim kutom pod kojim je palo na nju, pri čemu gubi 25% brzine. Nagib strme ravni je $\alpha = 45^\circ$. Točka B se nalazi na visini $h = \frac{H}{2}$. Odredite domet i kut pod kojim tijela pada na tlo, pri čemu se otpor zraka zanemaruje. Hoće li tijelo pri padu ponovno pasti na kosinu? Koliko % brzine bi tijelo trebalo izgubiti da padne točno na dno kosine?*

Rješenje:

Pri slobodnom padu tijelo udara u točku B na strmoj ravni, brzinom

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g\,(H-h)} = \sqrt{2g\frac{H}{2}} = \sqrt{gH} \\ &= \sqrt{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 35\,\mathrm{m}} = 18.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$



Slika 2.18.

Brzina tijela nakon odbijanja od strme ravni iznosi

$$v_1 = 0.75v = 0.75\cdot 18.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 13.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

S obzirom da je nagib kosine $\alpha = 45^\circ$, to je i kut upada na kosinu jednak $\beta = 90 - \alpha = 45^\circ$. Kako je normala na kosinu pod kutom od 45° slijedi da je pravac odbijanja od kosine horizontalni pravac. Dakle, tijelo nakon što se odbije od kosine ima gibanje kao horizontalni hitac sa visina $h = \frac{H}{2}$. Tijelo bi sa visine h slobodno padalo

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\frac{H}{2}}{g}} = \sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{35\,\mathrm{m}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1.89\,\mathrm{s}$$

pa je traženi domet jednak

$$D = v_x t = v_1 t = 13.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1.89\,\mathrm{s} = 26.27\,\mathrm{m}$$

Kako je $x-$ komponenta brzine konstantna, a $y-$ komponenta jednaka

$$v_y = gt = g\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{gH} = \sqrt{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 35\,\mathrm{m}} = 18.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

to je kut γ pod kojim tijelo pada na tlo

$$\begin{aligned} \tan\gamma &= \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_1}{v_y} = \frac{13.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{18.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0.75 \\ \gamma &= \arctan 0.75 = 0.64\,\mathrm{rad} = 36.87^\circ \end{aligned}$$

Tijelo neće pasti na kosinu jer je $D > h$ (kako je nagib kosine $\alpha = 45^\circ$ to je nagib kosine do horizontalne ravni jednak h, pa tijelo pada na ravninu). Da bi tijelo palo točno na dno kosine mora domet $D = h$ pa vrijedi

$$D = v_2 t \Longrightarrow v_2 = \frac{D}{t} = \frac{h}{t} = \frac{H}{2t} = \frac{35\,\mathrm{m}}{2\cdot 1.9\,\mathrm{s}} = 9.21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Tijelo bi trebalo imati brzinu v_2 pa je odnos upadne brzine v_1 i brzine nakon odbijanja jednak

$$\eta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{9.21\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0.66$$

pa bi tijelo trebalo izgubiti 34% upadne brzine.

Primjer 2.3.27 *Tijelo je izbačeno početnom brzinom $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ pod kutom $\alpha = 50^\circ$ s vertikalne litice visine h i udara o tlo nakon $t = 5\,\mathrm{s}$. Izračunajte maksimalnu visinu tijela u odnosu na tlo i visinu litice, ako je tlo horizontalno u odnosu na podnožje litice. Odredite udaljenost na kojoj će tijelo pasti u odnosu na podnožje litice.*

Rješenje:

Visinu litice dobijemo iz uvjeta ukupnog vremena leta i maksimalne visine koju dosegne tijelo u odnosu na točku izbačaja i ukupne visine u odnosu na podnožje litice.

$$\begin{aligned} t_u &= \frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 50}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.5617\,\mathrm{s} \\ H &= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{\left(20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\sin^2 50}{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 11.964\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Maksimalna visina $H_{\max}$ jednaka je slobodnom padu od trenutka tijela kada dosegne najvišu točku, tj.

$$t_p = t - t_u = 5\,\mathrm{s} - 1.\,561\,7\,\mathrm{s} = 3.\,438\,3\,\mathrm{s}$$

Tada je

$$H_{\max} = \frac{1}{2} g t_p^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3.\,438\,3\,\mathrm{s})^2 = 57.\,986\,\mathrm{m}$$

pa je visina litice

$$h = H_{\max} - H = 57.\,986\,\mathrm{m} - 11.\,964\,\mathrm{m} = 46.\,022\,\mathrm{m}$$

$$D = v_0 t \cos\alpha = 20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5\,\mathrm{s} \cdot \cos 50 = 64.\,279\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.28 *Dječak visine* $h_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ *s vrha nebodera visine* $h_2 = 33.5\,\mathrm{m}$ *baci kamen početnom brzinom* $v_0 = \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *pod kutom* $\alpha = 30\,^{\circ}$ *u odnosu na horizontalu. Izračnajte udaljenost kamena od dječaka u trenutku kada kamen udari o tlo? kolika je brzina udara kamena o tlo? koliki je kut pod kojim je kamen pao na tlo (u odnosu na okomicu tla)?*

Rješenje:

Iz komponenti položaja kamena i početnih uvjeta $x(0) = 0$, $y(0) = 335.\,\mathrm{m} + 1.5\,\mathrm{m} = 35\,\mathrm{m}$, uz uvjet da je u trenutku udara kamena o tlo $y-$komponenta položaja jednaka nuli

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= y(0) + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

dobiva se jednadžba za vrijeme udarca kamena

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ y(t) &= 35\,\mathrm{m} + \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \cdot \sin(30\,^{\circ}) - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2 = 0 \\ 0 &= \left(4.\,905 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) t^2 - \left(\sqrt{10}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) t - 35\,\mathrm{m} = 0 \end{aligned}$$

Korijeni kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned}
t_{1,2} &= \frac{\sqrt{10}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{\left(\sqrt{10}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4\cdot 4.905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(-35\,\mathrm{m})}}{2\cdot 4.905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\
&= \frac{\sqrt{10}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{(10+686.7)\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}{9.81} = \frac{\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{696.7}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\
&= \frac{\sqrt{10}\pm 26.395}{9.81}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

odakle su rješenja:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{\sqrt{10}+26.395}{9.81}\,\mathrm{s} = 3.01\ \mathrm{s} \\
t_2 &= \frac{\sqrt{10}-26.395}{9.81}\,\mathrm{s} = -2.37\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Uz korištenje rješenja t_1 (drugo rješenje nema fizikalno značenje) dobiva se za $x-$komponentu položaja kamena u trenutku udara

$$x(t) = x(0) + v_0 t\cos\alpha = 0 + \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 3.01\ \mathrm{s}\cdot\cos 30^\circ = 16.49\,\mathrm{m}$$

pa je udaljenost kamena od dječaka jednaka

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(16.49\,\mathrm{m})^2 + (35\,\mathrm{m})^2} = 38.69\,\mathrm{m}$$

Brzina kojom kamen udara o tlo dobiva se iz komponenti brzine za trenutak udarca

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= v_0\cos\alpha = \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos 30^\circ = \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{30}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_y(t) &= v_0\sin\alpha - gt = \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 30^\circ - 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3.01\ \mathrm{s} \\
&= \sqrt{40}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{1}{2} - 29.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left(\sqrt{10}-29.53\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -26.37\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

što za brzinu daje

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{30}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(-26.37\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 26.93\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kut pod kojim kamen udara o tlo jednak je

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{v_x}{v} = \frac{\sqrt{30}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{26.93\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0.203\,39 \\
\beta &= \arcsin 0.203\,39 = 0.204\,82\,\mathrm{rad} = 11.735^\circ
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.29 *Lopta se nalazi na tlu i udaljena je* $8.2\,\mathrm{m}$ *u horizontalnom i* $6.1\,\mathrm{m}$ *u vertikalnom smjeru od mete. Kojom brzinom igrač treba udariti loptu pod kutom od* $\alpha = 53\,^{\circ}$ *u odnosu na horizontalnu ravan da bi pogodio metu?*

Rješenje:

Postavimo li koordinatni sustav tako da je lopta u početnom trenutku u ishodištu, položajmete će biti

$$x = 8.2\,\mathrm{m},\ \ y = 6.1\,\mathrm{m}$$

a točka u kojoj se nalazi meta treba po zadanim uvjetima pripadati putanji lopte. Iz izraza za putanju kosog hitca dobiva se jednadžba

$$y = \left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 + (\tan\alpha)\,x$$

dobiva se uvjet za početnu brzinu

$$\begin{aligned}
y - x\tan\alpha &= \left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2 \\
v_0^2\,(y - x\tan\alpha) &= \left(-\frac{g}{2\cos^2\alpha}\right)x^2 \\
v_0^2 &= \frac{\left(-\frac{g}{2\cos^2\alpha}\right)x^2}{(y - x\tan\alpha)}
\end{aligned}$$

odakle je početna brzina

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{\frac{\left(-\frac{g}{2\cos^2\alpha}\right)x^2}{(y - x\tan\alpha)}} = \frac{x}{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\left(-\frac{g}{2}\right)}{(y - x\tan\alpha)}} \\
&= \frac{x}{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{g}{2\,(x\tan\alpha - y)}} \\
&= \frac{8.2\,\mathrm{m}}{\cos 53\,^{\circ}}\cdot\sqrt{\frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot[(8.2\,\mathrm{m})\cdot\tan 53\,^{\circ} - (6.1\,\mathrm{m})]}} \\
&= \frac{8.2\,\mathrm{m}}{\cos 53\,^{\circ}}\cdot\sqrt{\frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.\,563\,5\,\mathrm{m}}} = 13.\,625\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{1.\,025\,8\,\mathrm{s}^{-2}} \\
&= 13.\,8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.30 *Tijelo je izbačeno pod kutom $\alpha = 50^\circ$ prema horizontu. Za vrijeme $t_m = 20\,\mathrm{s}$ tijelo dosegne najvišu točku. Odredite početnu brzinu i položaj pada tijela.*

Rješenje:

Iz y - komponente brzine koja je u najvišoj točki jednaka nuli, dobivamo

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \sin\alpha - g t_m = 0 \\ v_0 &= \frac{g \cdot t_m}{\sin\alpha} = \frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{s}}{\sin 50} = 256.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Ukupno vrijeme leta tijela jednako je $t_{uk} = 2t_m = 40\,\mathrm{s}$ pa za domet tijela dobivamo

$$D = v_{0x} \cdot t_{uk} = v_0 \cdot t_{uk} \cdot \cos\alpha = 256.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 40\,\mathrm{s} \cdot \cos 50 = 6585.4\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.3.31 *Dokažite da je maksimalni domet kosog hica za kut $\alpha = 45^\circ$ te da je domet kosog hica jednak za kutove α i $90^\circ - \alpha$, pod pretpostavkom da je otpor zraka zanemariv.*

Rješenje:

Domet kosog hica opisan je izrazom

$$D(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{2.3.13}$$

uz konstantnu početnu brzinu, vrijednost kuta koji zadovoljava uvjet maksimuma funkcije je

$$\begin{aligned} \frac{dD(\alpha)}{d\alpha} &= 0 \\ \frac{dD(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}\frac{d}{d\alpha}(\sin 2\alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \cdot (2\cos 2\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0 \end{aligned}$$

odakle slijedi da mora vrijediti

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 0 \\ 2\alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$

Koristeći izraz za domet (2.3.13) imamo

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= D(90^\circ - \alpha) \\ \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} &= \frac{v_0^2 \sin[2(90^\circ - \alpha)]}{g} \\ \sin 2\alpha &= \sin(180^\circ - 2\alpha) \end{aligned}$$

no, to vrijedi jer je $\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)$ pa je jednakost dokazana.

Primjer 2.3.32 *Košarkaš pokušava pogoditi koš sa udaljenosti* $7\,\mathrm{m}$ *te izbacuje loptu sa visine* $2\,\mathrm{m}$ *po kutom od* $\alpha = 60^\circ$ *prema horizontalnoj ravnini. Izračunajte kojom početnom brzinom mora izbaciti loptu da bi ona završila u košu visine* $3.05\,\mathrm{m}$*?*

Rješenje:

Postavi li se koordinatni sustav tako da se ishodište u točki stajanja košarkaša, za početni položaj lopte dobiva se

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

dok je položaj koša

$$\begin{aligned} x_k &= 7\,\mathrm{m} \\ y_k &= 3.05\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Položaj koša koji treba pripadati putanji lopte ako se želi postići koš. Iz jednadžbe putanje

$$y(x) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x + y(0)$$

uz uvrštavanje vrijednosti položaja koša (x_k, y_k)

$$y(x_k) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot x_k^2 + (\tan \alpha) \cdot x_k + y(0)$$

za početnu brzinu dobivamo

$$\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot x_k^2 = (\tan \alpha) \cdot x_k + y(0) - y(x_k)$$

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{g \cdot x_k^2}{2\cos^2\alpha \cdot [(\tan\alpha)\cdot x_k + y(0) - y(x_k)]} \\ v_0 &= \frac{x_k}{\cos\alpha}\sqrt{\left(\frac{g}{2}\right)\frac{1}{(\tan\alpha)\cdot x_k + y(0) - y(x_k)}} \\ &= \frac{7\,\mathrm{m}}{\cos 60\,^\circ}\sqrt{\left(\frac{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\right)\frac{1}{(\tan 60\,^\circ)\cdot 7\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} - 3.05\,\mathrm{m}}} \\ &= 14\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{4.\,905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{11.\,074\,\mathrm{m}}} = 14\,\mathrm{m}\cdot 0.6655\,\mathrm{s}^{-1} = 9.32\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.33 *Koliko je daleko satelit od Zemljine površine, ako mu je srednja obodna brzina* $v = 7.3\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, *a ophodno vrijeme* $T = 106\,\mathrm{min}$? *Pretpostavite da se satelit giba po kružnici čije središte je središte Zemlje. Srednji polumjer Zemlje iznosi* $R_Z = 6370\,\mathrm{km}$.

Rješenje:
Polumjer kružnice po kojoj se giba satelit iznosi

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{v\cdot T}{2\pi} = \frac{7.3\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\cdot 106\cdot 60\,\mathrm{s}}{2\pi} = 7389.\,2\,\mathrm{km}$$

pa je visina satelita jednaka

$$h = R - R_z = 7389.2\,\mathrm{km} - 6370\,\mathrm{km} = 1019.\,2\,\mathrm{km}$$

Primjer 2.3.34 *Nakon isključenja motora, ventilator, čiji je broj okretaja iznosio* 900 *u minuti, počinje se jednoliko usporavati. Ako se ventilator zaustavio nakon* $t'' = 5$ *s, kolika mu je kutna akceleracija? Kolika je kutna brzina ventilatora* $t' = 3$ *s nakon početka usporene vrtnje? Odredite ukupni broj okretaja ventilatora do njegovog zaustavljanja?*

Rješenje:
U trenutku isključenja motora, kutna brzina ventilatora iznosila je

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\ \mathrm{rad}\cdot\frac{900}{60\ \mathrm{s}} = 30\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 30\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

Nakon $t'' = 5$ s ventilator se zaustavio. Iz izraza za kutnu brzinu $\omega = \omega_0 + \alpha t$ i rubnog uvjeta $\omega(t'') = 0$ dobivamo

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t''} = \frac{0 - 30\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{5\ \mathrm{s}} = -6\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = -6\pi\ \mathrm{s}^{-2} = -18.85\ \mathrm{s}^{-2}$$

gdje negativni predznak kutne akceleracije znači usporenu vrtnju, a rad nije nužno pisati u izrazima. Kutna brzina ventilatora zadana je izrazom $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ pa je nakon $t' = 3$ s

$$\omega(t') = \omega_0 + \alpha t' = 30\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} + \left(-6\pi \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot 3\,\mathrm{s} = 12\pi \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 12\pi\ s^{-1}$$

Vektor položaja proizvoljne točke na ventilatoru opisuje kut φ opisan izrazom

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

što nakon $t'' = 5$ s iznosi

$$\varphi(t'') = 30\pi\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 5\ \mathrm{s} + \frac{1}{2}\left(-6\pi\ \mathrm{s}^{-2}\right) \cdot (5\,\mathrm{s})^2 = 75\pi\ \mathrm{rad} = 235.62\ \mathrm{rad}$$

pa je ukupni broj okretaja

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{75\pi}{2\pi} = 37.5\ okr$$

Primjer 2.3.35 *Pomak tijela određen je jednadžbom* $s = A + Bt + Ct^2$*, u kojoj je* $A = 1\,\mathrm{m}$*,* $B = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *i* $C = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$*. Izračunajte srednju brzinu tijela između* $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ *i* $t_2 = 2\,\mathrm{s}$*, između* $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ *i* $t_{1.1} = 1.1\,\mathrm{s}$ *i između* $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ *i* $t_{1.001} = 1.001\,\mathrm{s}$.

Rješenje:
Prijeđeni put za vrijeme t iznosi

$$s(t) = 1\,\mathrm{m} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

pa je

$$\begin{aligned}
s_1 &= s(t_1) = 1\,\mathrm{m} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\mathrm{s} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2 = 16\,\mathrm{m} \\
s_{1.001} &= s(t_{1.001}) = 1\,\mathrm{m} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1.001\,\mathrm{s} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1.001\,\mathrm{s})^2 \\
&= 16.020\,005\,\mathrm{m} \\
s_{1.1} &= s(t_{1.1}) = 1\,\mathrm{m} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1.1\,\mathrm{s} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1.1\,\mathrm{s})^2 = 18.05\,\mathrm{m} \\
s_2 &= s(t_2) = 1\,\mathrm{m} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} + 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 41\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Prema definiciji srednje brzine slijedi

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{2,\,1} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{41\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}} = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
\overline{v}_{1.1,\,1} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{1,1} - s_1}{t_3 - t_1} = \frac{18.\,05\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m}}{1.1\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}} = 20.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
\overline{v}_{1.001,\,1} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{1,001} - s_1}{t_3 - t_1} = \frac{16.020\;005\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m}}{1.001\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{s}} = 20.005\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Iz tih se računa vidi da se $\overline{v}$ približuje vrijednosti od $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, kada se Δt smanjuje. Odatle se može zaključiti da je trenutna brzina tijela nakon jedne sekunde jednaka $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Derivirajući pomak po vremenu zaista se dobiva

$$\begin{aligned}
v\,(t) &= \frac{ds}{dt} = B + 2Ct \\
v\,(1\,\mathrm{s}) &= 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2 \cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.36 *Na semaforu osobni automobil miruje čekajući zeleno svjetlo. U trenutku kada na semaforu zasvijetli zeleno svjetlo kraj automobila prođe kamion gibajući se stalnom brzinom od* $v_k = 9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *U tom trenutku osobni automobil počne ubrzavati iz mirovanja ubrzanjem po zakonu* $a\,(t) = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot \sqrt{t}$. *Izračunajte koliko vremena će trebati automobilu da sustigne kamion, koliku brzinu će tada imati, te koliki je prijeđeni put do tog trenutka?*

Rješenje:

Iz definicionog izraza za ubrzanje tražimo izraz za brzinu automobila

$$\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}\sqrt{t} \\
dv &= 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}\sqrt{t}dt \\
v\,(t) &= \int_0^v dv = \int_0^t 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}\sqrt{t}dt = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot t^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Iz izraza za pređeni put slijedi

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \Longrightarrow ds = vdt \\ s &= \int_0^s ds = \int_0^t vdt = \int_0^t \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \int_0^t t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{8}{15}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} t^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

osobni automobil će sustići kamion kada im pređeni putevi budu jednaki

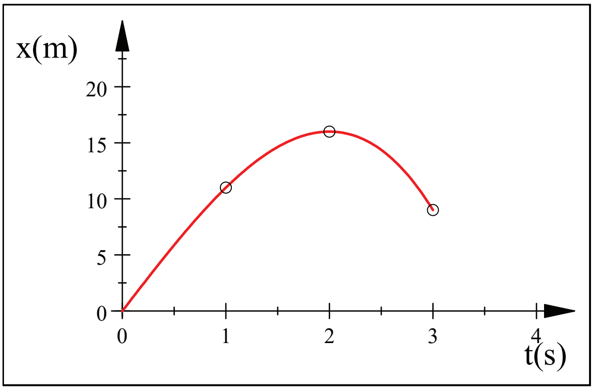
$$\begin{aligned} s &= s_k = v_k t = \frac{8}{15}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} t^{\frac{5}{2}} \\ \frac{15}{8}\frac{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{m}} v_k &= t^{\frac{3}{2}} /()^{\frac{2}{3}} \\ t &= \left(\frac{15}{8}\frac{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{m}} \cdot v_k\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{15}{8}\frac{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{m}} \cdot 9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(16.875\,\mathrm{s}^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 6.58\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

U tom trenutku vrijednosti brzine automobila i pređeni put su:

$$\begin{aligned} v\,(6.58\,\mathrm{s}) &= \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot (6.58\,\mathrm{s})^{\frac{3}{2}} = 22.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ s\,(6.58\,\mathrm{s}) &= \frac{8}{15}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\frac{5}{2}}} \cdot (6.58\,\mathrm{s})^{\frac{5}{2}} = 59.23\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

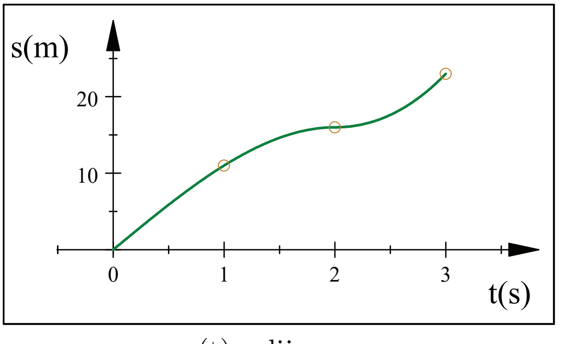
Primjer 2.3.37 *Materijalna se točka giba u smjeru osi x, tako da joj je pomak određen jednadžbom $x = At - Bt^3$, gdje je $A = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $B = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$. Nacrtajte $(x,t)\,,(s,t)\,,(v,t)$ i (a,t) dijagram za $0 \leq t \leq 3\,\mathrm{s}$. Izračunajte srednju brzinu i srednju akceleraciju točke u vremenu od 0 do $3\,\mathrm{s}$.*

Rješenje:



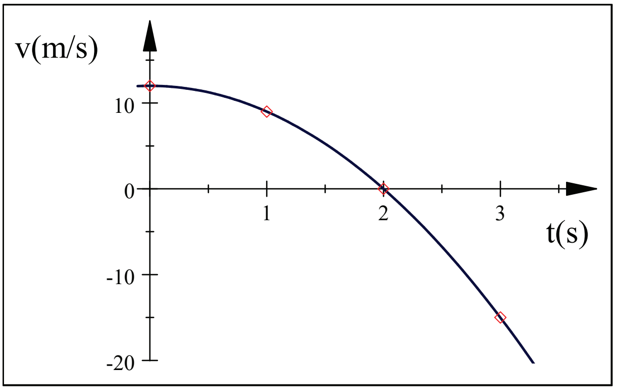
x(t) - dijagram

Prijeđeni put opisujemo kao $s(t) = \begin{cases} 12t - t^3 & 0 \leq t \leq 2 \\ t^3 - 12t & 2 < t \leq 3 \end{cases}$



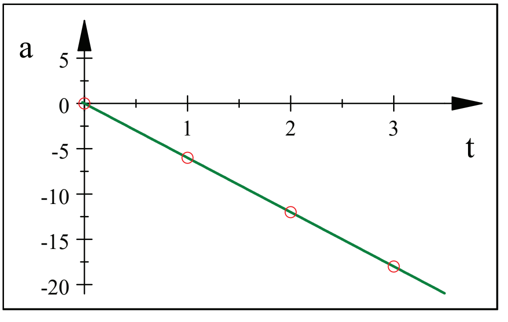
s(t) - dijagram

Brzinu dobivamo preko izraza $v(t) = A - 3Bt^2 = \left(12 - 3t^2\right) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dakle, grafikon ima oblik



v(t) - dijagram

Ubrzanje opisujemo jednadžbom $a\,(t) = -6Bt = (-6t)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$



a(t) - dijagram

Primjer 2.3.38 *Čestica se giba u x, y ravnini gdje vektor položaja ovisi o vremenu po zakonu* $\overrightarrow{r}\,(t) = (At^2 - Bt)\overrightarrow{i} + \;Ct^3\overrightarrow{j}$, *gdje je* $A = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $B = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $C = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$. *Izračunajte* $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{v}$, *i* $\overrightarrow{a}$ *u* $t = 1\,\mathrm{s}$. *Kada x komponenta brzine postaje jednaka nuli? Kolika je tada y komponenta brzine?*

Rješenje:

Funkcija položaja je

$$\overrightarrow{r}\,(t) = (At^2 - Bt)\overrightarrow{i} + \;Ct^3\overrightarrow{j}$$

koja ima vrijednost u prvoj sekundi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}(1\,\mathrm{s}) &= \left[10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(1\,\mathrm{s})^2 - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1\,\mathrm{s}\right]\overrightarrow{i} + 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot(1\,\mathrm{s})^3\,\overrightarrow{j} \\ &= \left(8\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Funkcija brzine je vremenska derivacija funkcije položaja

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\,(t) &= \frac{d\overrightarrow{r}\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(At^2 - Bt)\,\overrightarrow{i} + \ Ct^3\,\overrightarrow{j}\right] \\ &= \frac{d}{dt}(At^2 - Bt)\cdot\overrightarrow{i} + \ \frac{d}{dt}\left(Ct^3\right)\cdot\overrightarrow{j} \\ &= (2\ At - B)\,\overrightarrow{i} + \left(3Ct^2\right)\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

i u prvoj sekundi ima vrijednost

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\,(1\,\mathrm{s}) &= \left(2\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\,\mathrm{s} - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\overrightarrow{i} + \left[3\cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot(1\,\mathrm{s})^2\right]\overrightarrow{j} \\ &= \left(18\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Funkcija ubrzanja je vremenskaderivacija funkcije brzine

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\,(t) &= \frac{d\overrightarrow{v}\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2At - B)\,\overrightarrow{i} + \left(3Ct^2\right)\overrightarrow{j}\right] \\ &= \frac{d}{dt}\,(2At - B)\cdot\overrightarrow{i} + \frac{d}{dt}\left(3Ct^2\right)\cdot\overrightarrow{j} \\ &= (2A)\,\overrightarrow{i} + (6Ct)\,\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

i ima vrijednost u prvoj sekundi

$$\overrightarrow{a}\,(1\,\mathrm{s}) = \left(2\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\overrightarrow{i} + \left(6\cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot 1\,\mathrm{s}\right)\overrightarrow{j} = \left(20\,\overrightarrow{i} + 12\,\overrightarrow{j}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Kako vrijedi

$$\overrightarrow{v}\,(t) = v_x\,(t)\,\overrightarrow{i} + v_y\,(t)\,\overrightarrow{j} = (2\ At - B)\,\overrightarrow{i} + \left(3Ct^2\right)\overrightarrow{j}$$

$$v_x = 0 \Longrightarrow 2At - B = 0$$

$$t = \frac{B}{2A} = \frac{2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0.1\,\mathrm{s}$$

$$v_y\,(0.1\,\mathrm{s}) = 3Ct^2 = 3\cdot 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot(0.1\,\mathrm{s})^2 = 0.06\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 2.3.39 *Krenuvši iz mirovanja materijalna se točka giba po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna s vremenom. Koliki je prijeđeni put nakon* $12\,\mathrm{s}$ *ako je nakon* $5\,\mathrm{s}$ *brzina točke* $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$*?*

Rješenje:

Brzina je vremenski integral akceleracije. Budući da je $a = kt$, onda je

$$v = \int_0^t a\ dt = \int_0^t kt\ dt = \frac{kt^2}{2}$$

$$k = \frac{2v}{t^2} = \frac{2 \cdot 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(5\,\mathrm{s})^2} = \frac{40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{25\,\mathrm{s}^2} = 1.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$$

Budući da je početna brzina, za $t = 0\,\mathrm{s}$ točke jednaka nuli, iz $t = 5\,\mathrm{s}$, $v = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ dobiva se da je $k = 1.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$.

Prijeđeni je put

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{kt^2}{2}\ dt = \frac{kt^3}{6} \\ s(t = 12\,\mathrm{s}) &= \frac{1.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \cdot (12\,\mathrm{s})^3}{6} = 460.8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.40 *Krenuvši iz mirovanja materijalna se točka giba po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna kvadratu vremena. Kolika je brzina materijalne točke ako je u trenutku* $t = 10\,\mathrm{s}$ *prijeđeni put jednak* $s = 750\,\mathrm{m}$*?*

Rješenje:

Akceleracija je proporcionalna kvadratu vremena, dakle $a = kt^2$. Tada je

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t kt^2 dt = k \cdot \frac{1}{3} t^3 \,|_0^t = \frac{k}{3}\left(t^3 - 0^3\right) = \frac{kt^3}{3}$$

a prijeđeni put

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{kt^3}{3} dt = \frac{kt^4}{12} \,|_0^t = \frac{k}{12}\left(t^4 - 0^4\right) = \frac{kt^4}{12}$$

Iz početnog uvjeta možemo odrediti konstantu k

$$\begin{aligned} s\,(10\,\mathrm{s}) &= \frac{k\,(10\,\mathrm{s})^4}{12} = 750\,\mathrm{m} \\ k &= \frac{12\cdot 750\,\mathrm{m}}{10000\,\mathrm{s}^4} = 0.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4} \end{aligned}$$

pa je brzina v u tom trenutku

$$\begin{aligned} v\,(t) &= \frac{kt^3}{3} \\ v\,(10\,\mathrm{s}) &= \frac{0.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}\cdot(10\,\mathrm{s})^3}{3} = 300\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Primjer 2.3.41 *Brzina čestice koja se giba u pozitivnom smjeru x osi opisana je izrazom $v\,(x) = A\sqrt{x}$, gdje je $A = 5\frac{\sqrt{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}$. Ako je u trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$ čestica u ishodištu, kolika je srednja brzina čestice na putu od $100\,\mathrm{m}$?*

Rješenje:

Neka u trenutku t čestica ima položaj x, kako je u trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$ čestica u ishodištu $x = 0\,\mathrm{m}$ imamo

$$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{x}\Big/\cdot\frac{dt}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = Adt\Big/\int$$

što nakon integracije daje

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = A\int_0^t dt \Longrightarrow 2\sqrt{x}\mid_o^x = At\mid_0^t$$

$$2\left(\sqrt{x}-\sqrt{0}\right) = A\,(t-0) \Longrightarrow 2\sqrt{x} = At$$

$$x = \frac{A^2}{4}t^2$$

Za put od $100\,\mathrm{m}$ potrebno vrijeme je

$$t = \frac{2\sqrt{x}}{A} = \frac{2\cdot\sqrt{100\,\mathrm{m}}}{5\frac{\sqrt{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = 4\,\mathrm{s}$$

Srednja brzina jednaka je kvocijentu prijeđenog puta i vremena da se taj put prijeđe

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{100\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = 25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Primjer 2.3.42 *Čovjek se nalazi u točki A na obali mora i uočava dječaka u moru kojemu treba pomoć. Dječak se nalazi u točki B i udaljen je od obale* $70\,\mathrm{m}$*, a čovjek ga vidi pod kutom od* $30°$ *u odnosu na obalu. Čovjek može trčati brzinom* $v_1 = 30\frac{\mathrm{km}}{h}$ *i plivati brzinom* $v_2 = 5\frac{\mathrm{km}}{h}$*. Hoće li čovjek odmah skočiti u vodu i plivati ili će trčati obalom, pa onda skočiti u vodu i plivati? Za koje vrijeme će stići do dječaka?*

Rješenje:

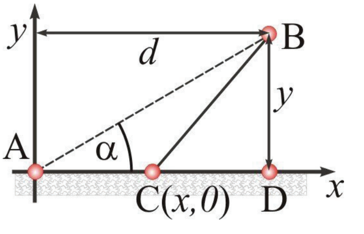
Postavimo koordinatni sustav tako da je ishodište u početnom položaju čovjeka (slika 2.19.), a os x neka aproksimira obalu. Tada su koordinate dječaka:

$$\begin{aligned} y &= \overline{AB}\sin\alpha = 70\,\mathrm{m} \\ \overline{AB} &= \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{70\,\mathrm{m}}{\sin 30} = 140\,\mathrm{m} \\ x &= d = \overline{AB}\cos\alpha = 140\,\mathrm{m}\cdot\cos 30 = 121.24\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Čovjek želi u najkraćem vremenu stići do dječaka. Ako bi čovjek samo plivao, trebalo bi mu

$$t = \frac{\overline{AB}}{v_2} = \frac{140\,\mathrm{m}}{1.3\dot{8}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 100.8\,\mathrm{s}$$

Pretpostavimo da će čovjek trčati obalom do neke točke $C = C\,(x,0)$. Potrebno vrijeme dolaska do dječaka u ovom slučaju je vrijeme trčanja do točke C, plus vrijeme plivanja od točke C do dječaka.



Slika 2.19.

$$t = t_{tr} + t_{pl} = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{y^2 + (d-x)^2}}{v_2} = t\,(x)$$

gdje je d udaljenost od čovjeka do okomice dječaka na obalu (točka D).

Tražimo minimalnu vrijednost vremena po veličini x. Uvjet minimalnosti je:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= 0 \\
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{v_1} + \frac{2\,(d-x)\cdot(-1)}{v_2 \cdot 2\sqrt{y^2+(d-x)^2}} = 0 \\
\frac{v_2}{v_1} &= \frac{(d-x)}{\sqrt{y^2+(d-x)^2}}
\end{aligned}$$

kvadriramo jednadžbu i pronađemo joj inverznu vrijednost

$$\begin{aligned}
\frac{v_1^2}{v_2^2} &= \frac{y^2+(d-x)^2}{(d-x)^2} = \frac{y^2}{(d-x)^2} + 1 \\
\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1 &= \frac{y^2}{(d-x)^2} \\
\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2^2} &= \frac{y^2}{(d-x)^2}
\end{aligned}$$

odakle izdvojimo x

$$\begin{aligned}
x_{\min} &= d - y\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} \\
&= 121.24\,\mathrm{m} - 70\,\mathrm{m}\frac{1,3\dot{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{\left(8,\dot{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(1,3\dot{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}} = 109.44\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

proteklo vrijeme je

$$\begin{aligned}
t\,(x) &= \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{y^2+(d-x)^2}}{v_2} \\
t\,(109.44\ \ \mathrm{m}) &= \frac{109.44\,\mathrm{m}}{8.\dot{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + \frac{\sqrt{(70\,\mathrm{m})^2 + (121.24\,\mathrm{m} - 109.44\,\mathrm{m})^2}}{1.3\dot{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\
&= 64.63\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Dakle, čovjek je do dječaka stigao za $t = 64.63\,\mathrm{s}$ što je brže za

$$t' = 100.8\,\mathrm{s} - 64.63\,\mathrm{s} = 36.17\,\mathrm{s}$$

u odnosu da je odmah počeo plivati.

2.4 Zadatci

Problem 2.4.1 *Za koliko puta je potrebno smanjiti visinu padanja da bi vrijeme padanja bilo dva puta manje?*

Rezultat: 4 puta.

Problem 2.4.2 *Dva tijela A i B slobodno padaju. Tijelo B pada sa visine $h_B = 150\,\mathrm{m}$ i padne ranije od tijela A za $t = 3.5\,\mathrm{s}$. Sa koje visine je pušteno tijelo A?*

Rezultat: $h_A = 397\,\mathrm{m}$.

Problem 2.4.3 *Čelična kuglica slobodno pada sa visine $h = 1\,\mathrm{m}$ na čeličnu ploču od koje se odbije, pri čemu smanji svoju brzinu za 10%. Isto se događa prilikom svakog odbijanja kuglice od ploče. Koliko će biti treće vrijeme padanja kuglice?*

Rezultat: $t_3 = 0.36\,\mathrm{s}$.

Problem 2.4.4 *Tijelo bacimo vertikalno uvis početnom brzinom v_0. Poslije prijeđenog puta $h = 200\,\mathrm{m}$ brzina tijela iznosi $v = 150\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolika je početna brzina tijela, poslije koliko vremena će tijelo pasti na tlo i do koje visine će dospjeti tijelo?*

Rezultat: $v_0 = 163\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $t = 33.3\,\mathrm{s}$, $h_{\max} = 1348\,\mathrm{m}$.

Problem 2.4.5 *Neko tijelo bačeno vertikalno u vis, poslije $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ nalazi se na visini h, nakon što je dosegnulo najvišu točku putanje i počelo padati, tijelo će poslije vremena $t_2 = 3.058\,\mathrm{s}$ biti ponovno na istoj visini. Izračunajte visinu h kao i početnu brzinu v_0 kojom je tijelo bačeno uvis.*

Rezultat: $h = 29.44\,\mathrm{m}$, $v_0 = 24.53\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.6 *Čamac prelazi rijeku okomito na njezin tok brzinom $v = 7.2\frac{\mathrm{km}}{h}$. Kada stigne na drugu obalu tok rijeke ga je odnio $150\,\mathrm{m}$ nizvodno. Pronađite brzinu toka rijeke ako je ona široka $500\,\mathrm{m}$. Koliko je vremena bilo potrebno čamcu da stigne na drugu obalu?*

Rezultat: $v_r = 2.16\frac{\mathrm{km}}{h}$, $t = 251.9\,\mathrm{s} = 0.07h$.

Problem 2.4.7 *Automobil se giba niz brijeg i u određenom trenutku ima brzinu $v = 17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolika je vertikalna i horizontalna komponenta njegove brzine u tom trenutku, ako brijeg ima nagib $\alpha = 30°$?*

Rezultat: $v_{ver.} = 8.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{hor.} = 14.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.8 *Padajući vertikalno, kišne kapi po bočnim staklima automobila ostavljaju tragove koji s vertikalom zatvaraju kut od $\alpha = 60°$. Ako se automobil giba konstantnom brzinom $v_1 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, odredite brzinu kišnih kapi?*

Rezultat: $v = 8.7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.9 *Iz mjesta A na riječnoj obali čovjek želi čamcem stići u mjesto B na suprotnoj obali koje je udaljeno $d = \sqrt{5}\,\mathrm{km}$ od točke A. Širina rijeke je $a = 1\,\mathrm{km}$, brzina čamca u odnosu na vodu iznosi $v_1 = 5\frac{\mathrm{km}}{h}$, a brzina rijeke $v_2 = 2\frac{\mathrm{km}}{h}$. Može li čovjek udaljenost prijeći za $t = 30$ minuta gibajući se uzvodno?*

Rezultat: $t = 43$ minute.

Problem 2.4.10 *Brzina plivača u rijeci je v, a brzina rijeke je u. Ako je plivač započeo preplivavanje rijeke s jedne obale brzinom v pod kutom α s obzirom na okomicu između dviju obala, koliki je kut β koji cijela njegova staza do druge obale zatvara prema okomici? Izračunajte kut β ako je $v = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $u = 1.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 15°$.*

Rezultat: $\beta = 61.22°$.

Problem 2.4.11 *Sa zgrade visoke $h = 15\,\mathrm{m}$ bačeno je tijelo vertikalno prema tlu početnom brzinom $v_0 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko je vrijeme padanja tijela? Kolika je brzina tijela pri udaru o tlo? Kako dugo bi tijelo slobodno padalo? Otpor zraka zanemarite.*

Rezultat: $t = 1\,\mathrm{s}$; $v = 19.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $t' = 1.7\,\mathrm{s}$.

Problem 2.4.12 *U podnožju zgrade tijelo je bačeno vertikalno u vis početnom brzinom $v_0 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. U istom trenutku s vrha zgrade visoke $h = 21\,\mathrm{m}$ bačeno je drugo tijelo prema dolje početnom brzinom $v_1 = \frac{v_0}{2}$. Na kojoj će se visini tijela susresti? Kolika je minimalna brzina v_0 potrebna da bi se tijela susrela prije pada drugog tijela?*

Rezultat: $h = 4.39\,\mathrm{m}$; $v_0 > 8.29\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.13 *Gibajući se stalnom brzinom $v_0 = 40\frac{\mathrm{km}}{h}$ vozač automobila počinje kočiti i nakon $t = 4.6\,\mathrm{s}$ kočenja prijeđe upravo dvostruki put od onog koji je prešao u prvih $t_1 = 1.5\,\mathrm{s}$ kočenja. Kolika je akceleracija kočenja?*

Rezultat: $a = -2.13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 2.4.14 *Tijelo je izbačeno vertikalno u vis brzinom $v_0 = 100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ako je akceleracija tijela $a = g - kv^2$, gdje je $k = 0.001\,\mathrm{m}^{-1}$, kojom će se brzinom i nakon koliko vremena projektil vratiti na tlo?*

Rezultat: $v_1 = 70.3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ t = 16.9\,\mathrm{s}$.

Problem 2.4.15 *Materijalna točka se giba po zakonu:*

$$
\begin{aligned}
x &= 2a\cosh(kt)\\
y &= 2a\sinh(kt)
\end{aligned}
$$

Odredite iznos brzine i ubrzanja kao funkciju apsolutne vrijednosti vektora položaja materijalne točke.

Rezultat: $|\overrightarrow{v}| = kr$, $|\overrightarrow{a}| = k^2 r$.

Problem 2.4.16 *Padobranac na visini $200\,\mathrm{m}$ otvara padobran i nakon $38\,\mathrm{s}$ pada na tlo brzinom $4.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pretpostavimo li da je akceleracija padobranca $g - kv$, izračunajte konstantu proporcionalnosti i brzinu padobranca u trenutku otvaranja padobrana.*

Rezultat: $k = 2.04\,\mathrm{s}^{-1},\ v_0 = 41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.17 *Kolika je kutna brzina tijela koje se giba ravnomjerno po kružnici, pri čemu tijelo napravi kutni pomak od $\varphi = 270°$ svake sekunde? Koliko obrtaja napravi tijelo za vrijeme od $t = 1\,\mathrm{min}$?*

Rezultat: $n = 45$.

Problem 2.4.18 *Kolikom se brzinom giba neka točka u Mostaru uslijed rotacije Zemlje oko vlastite osi? Geografska širina Mostara iznosi $\varphi \approx 43°20'$, dok je srednji polumjer Zemlje $R_Z \approx 6370\,\mathrm{km}$.*

Rezultat: $v \approx 337\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.19 *Obodna brzina točke na disku koji rotira oko vlastite osi iznosi* $v_1 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Točke diska koje su* $10\,\mathrm{cm}$ *bliže osi rotacije, imaju obodnu brzinu* $v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. *Odredite kutnu brzinu rotacije diska?*

Rezultat: $\omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.20 *Kotač počne rotirati jednoliko ubrzano iz mirovanja. Kolika je kutna akceleracija ako za vrijeme treće sekunde kotač napravi* 20 *okr.*

Rezultat: $\alpha = 16\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 2.4.21 *Kotač polumjera* $10\,\mathrm{cm}$ *vrti se oko svoje osi tako da mu polumjer opisuje kut* $\varphi = At^3$, *gdje je* $A = \pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^3}$. *Kolika je kutna brzina, kutna akceleracija i tangencijalna akceleracija proizvoljne točke na rubu kotača u trenutku* $t = 2\,\mathrm{s}$*?*

Rezultat: $\omega = 38\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 38\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$, $a_t = 3.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Problem 2.4.22 *Kotač se vrti oko svoje osi frekvencijom* $\nu = 0.5\,\mathrm{s}^{-1}$ *i počinje se jednoliko usporavati. Ako se zaustavi nakon 10 okretaja koliko iznosi:*

a) kutna akceleracija

b) vrijeme zaustavljanja

c) kutna brzina kotača $20\,\mathrm{s}$ nakon početka usporene vrtnje.

Rezultat: a) $\alpha = \frac{\pi\cdot\nu^2}{N} = -0.08\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$, b) $t = \frac{2N}{\nu} = 40\,\mathrm{s}$, c) $\omega = 1.57\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Problem 2.4.23 *Kojom se brzinom giba automobil ako je u prvom stupnju prijenosa (prvoj brzini) pri* $3000\,\frac{okr}{\mathrm{min}}$*? Prijenos u mijenjaču iznosi* $1 : 3.58$, *a omjer prijenosa u diferencijalu je* $13 : 53$. *Opseg kotača iznosi* $1.7\,\mathrm{m}$.

Rezultat: $v = 21\,\frac{\mathrm{km}}{h}$.

Problem 2.4.24 *Sitna kuglica vrti se kružnicom polumjera* r *konstantnim tangencijalnim ubrzanjem* a_t. *Izračunajte funkciju* $a_r(t) = f(t)$. *U kojem će trenutku mjereći od početka gibanja, radijalna akceleracija biti dvostruko veća od tangencijalne ako je* $r = 30\,\mathrm{cm}$, *a* $a_t = 0.06 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Rezultat: $a_r = \frac{a_t^2}{r} t^2, \; t = 3.16\,\mathrm{s}$.

Problem 2.4.25 *Materijalna se točka giba u ravnini prema zakonu*

$$\begin{aligned} x &= a \sin bt \\ y &= a(1 - \cos bt) \end{aligned}$$

gdje su a *i* b *pozitivne konstante. Kolika je udaljenost koju prijeđe tijelo za vrijeme* t_0? *Koliki je kut između akceleracije i brzine u tom trenutku?*

Rezultat: $l = abt_0, \; \alpha_a - \alpha_v = \Delta\alpha = \frac{\pi}{2}$.